Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°1
Samedi 23 septembre 2023 (2h00)

Exercice 1

1. • Si $x \geqslant -5$, alors $x+5 \geqslant 0$ donc
$$|x+5| = 3x-4 \Leftrightarrow x+5 = 3x-4 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}.$$
On a bien $\frac{9}{2} \geqslant -5$ donc $x = \frac{9}{2}$ est bien solution de l'équation.
• Si $x < -5$, alors $x+5 < 0$ donc
$$|x+5| = 3x-4 \Leftrightarrow -x-5 = 3x-4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$
Or, $-\frac{1}{4} \geqslant -5$ donc $-\frac{1}{4}$ n'est pas solution de l'équation.
$$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation est donc } x = \frac{9}{2}.}$$

2. L'inéquation est bien définie pour $x \geqslant 1$.
Soit $x \geqslant 1$ tel que $x-2 \leqslant \sqrt{x-1}$.
• Si $x \geqslant 2, x-2 \geqslant 0$ donc par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, l'inégalité implique que
$$(x-2)^2 \leqslant x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \leqslant x-1 \Leftrightarrow x^2-5x+5 \leqslant 0.$$
Le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 5 > 0$ donc les racines sont $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.
On a $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2$ et $\frac{5+\sqrt{5}}{2} \geqslant 2$ donc si $x \geqslant 2$,
$$x^2-5x+5 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right].$$
• Si $x \in [1,2[$, on a $x-2 < 0 \leqslant \sqrt{x-1}$ donc tout $x \in [1,2[$ est solution de l'équation.
$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est } \left[1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right].}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor x-1 \rfloor = \lfloor 2x+3 \rfloor$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n = \lfloor x \rfloor$.
• Si $n \leqslant x < n + \frac{1}{2}$, on a $n-1 \leqslant x-1 < n - \frac{1}{2} < n$ donc $\lfloor x-1 \rfloor = n-1$.

D'autre part, $n \leqslant x < n + \frac{1}{2} \Rightarrow 2n \leqslant 2x < 2n + 1 \Rightarrow 2n + 3 \leqslant 2x + 3 < 2n + 4$ donc $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n + 3$ et $\lfloor x - 1 \rfloor = \lfloor 2x + 3 \rfloor$ implique $n - 1 = 2n + 3$ d'où $n = -4$.
Ainsi, dans ce cas, on a $x \in [-4, -\frac{7}{2}[$.
• Si $n + \frac{1}{2} \leqslant x < n + 1$, on a $n - 1 < n - \frac{1}{2} \leqslant x - 1 < n$ donc $\lfloor x - 1 \rfloor = n - 1$.
D'autre part, $n + \frac{1}{2} \leqslant x < n + 1 \Rightarrow 2n + 1 \leqslant 2x < 2n + 2 \Rightarrow 2n + 4 \leqslant 2x + 3 < 2n + 5$ donc $\lfloor 2x + 3 \rfloor = 2n + 4$ et $\lfloor x - 1 \rfloor = \lfloor 2x + 3 \rfloor$ implique $n - 1 = 2n + 4$ d'où $n = -5$.
Ainsi, dans ce cas, on a $x \in [-\frac{9}{2}, -4[$.

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des réels } x \text{ tels que } \lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor \text{ est } \left[-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right[.}$$

Exercice 2

1. On a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$

2. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Montrons-le par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \quad \text{(Relation de Chasles)} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n + 1$.
D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

3. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n = n$.

•Initialisation : Pour $n=1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} x_k\right)^2$ donc

$$x_1^3 = x_1^2 \Rightarrow x_1^2(x_1-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,\text{ou}\, x_1 = 1.$$

Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, on a $x_1 = 1$, ce qui prouve la propriété au rang $n=1$.

•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1,n]\!], x_k = k$.

Montrons que $x_{n+1} = n+1$.

Par hypothèse sur la suite, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 + x_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + x_{n+1}\right)^2 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + x_{n+1}^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\times\frac{n(n+1)}{2}\times x_{n+1} + x_{n+1}^2\\
&\Leftrightarrow \quad x_{n+1}\left(x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1) = 0 \quad (\text{car}(x_{n+1} \neq 0)\\
&\Leftrightarrow \quad (x_{n+1}-n-1)(x_{n+1}+n) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x_{n+1} = n+1 \quad \text{ou} \quad x_{n+1} = -n.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n > 0$ donc $x_n = -n$ est impossible. Ainsi, on a nécessairement $x_{n+1} = n+1$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^*, x_n = n.}$$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|x| = |x-2+2| \leqslant |x-2| + |2| = |x-2| + 2$$

donc $|x| - 2 \leqslant |x-2|$.

Par croissance de la partie entière sur $\mathbb{R}$, ceci implique que

$$f(x) = \lfloor |x| - 2 \rfloor \leqslant \lfloor |x-2| \rfloor = g(x)$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout}\, x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x).}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lfloor |x| \rfloor \leqslant |x| < \lfloor |x| \rfloor + 1$ donc $\lfloor |x| \rfloor - 2 \leqslant |x| - 2 < \lfloor |x| \rfloor - 1$.

Puisque $\lfloor |x| \rfloor - 2 \in \mathbb{Z}$, par définition de la partie entière, ceci implique que

$$\boxed{\text{pour tout}\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor |x| - 2 \rfloor = \lfloor |x| \rfloor - 2.}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

D'autre part, si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -x \rfloor = -x = -\lfloor x \rfloor$.

• Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Ainsi, $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$ donc $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.

(b) • Soit $x \geqslant 2$. Alors $|x-2| = x-2$.
De même que dans la question 2, on montre que $g(x) = \lfloor x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 2$.
• Soit $x < 2$. Alors $|x-2| = 2-x$.
De même que dans la question 2, on montre que $g(x) = \lfloor 2-x \rfloor = 2 + \lfloor -x \rfloor$.
D'après la question précédente, on a donc

$$g(x) = \begin{cases} 2 - \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 - \lfloor x \rfloor & \text{si} x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En conclusion, on a

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor - 2 & \text{si} x \in [2, +\infty[\\ 2 - \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, 2[\\ 1 - \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \overline{\mathbb{Z}} \cap]-\infty, 2[. \end{cases}}$$

Exercice 4

Raisonnons par analyse-synthèse.
•**Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0)-1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \,\text{ou}\, f(0) = 1.$$

Supposons que $f(0) = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors en posant $y = 0$:

$$f(x)f(0) - f(0) = x \Leftrightarrow x = 0,$$

et ce pour tout réel x, ce qui est absurde.
Nécessairement, on a $f(0) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en posant $y = 0$:

$$f(x)f(0) - f(0) = x \Leftrightarrow f(x) = x + 1.$$

•**Synthèse :** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.
On a alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - xy - 1 = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'unique fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ à vérifier cette propriété est } \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1. \end{array}}$$

Problème

1. (a) Soient $(R,S) \in \mathcal{P}(E)^2$. Posons $X = A \cap (\overline{R} \cup S)$ et $Y = A \cap (R \cup \overline{S})$.
Alors, on a

$$X \cup Y = [A \cap (\overline{R} \cup S)] \cup [A \cap (R \cup \overline{S})] = A \cap [(\overline{R} \cup S) \cup (R \cap \overline{S}] = A \cap E = A.$$

(b) Soient X et Y des parties telles que $X \cup Y = A$. Posons $R = Y$ et $S = X$. On a bien

$$A \cap (\overline{R} \cup S) = (X \cup Y) \cap (\overline{Y} \cup X) = X \cup (Y \cap \overline{Y}) = X \cup \emptyset = X$$

et

$$A \cap (R \cup \overline{S}) = (X \cup Y) \cap (Y \cup \overline{X}) = Y \cup (X \cap \overline{X}) = Y \cup \emptyset = Y$$

(c) On a donc montré l'équivalence

$$X \cup Y = A \Leftrightarrow \exists (R, S) \in \mathcal{P}(E)^2, \begin{cases} X = A \cap \left(\overline{R} \cup S\right) \\ Y = A \cap \left(R \cup \overline{S}\right). \end{cases}$$

2. (a) D'après les lois de De Morgan, on a les équivalences :

$$X \cap Y = A \Leftrightarrow \overline{X \cap Y} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{A}.$$

(b) En utilisant la question 1 et la question précédente, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} X \cap Y = A &\Leftrightarrow \overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \exists (R, S) \in \mathcal{P}(E)^2, \begin{cases} \overline{X} = \overline{A} \cap \left(\overline{R} \cup S\right) \\ \overline{Y} = \overline{A} \cap \left(R \cup \overline{S}\right). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (R, S) \in \mathcal{P}(E)^2, \begin{cases} X = \overline{\overline{A} \cap \left(\overline{R} \cup S\right)} \\ Y = \overline{\overline{A} \cap \left(R \cup \overline{S}\right)}. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (R, S) \in \mathcal{P}(E)^2, \begin{cases} X = A \cup \left(\overline{\overline{R} \cup S}\right) \\ Y = A \cup \left(\overline{R \cup \overline{S}}\right). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (R, S) \in \mathcal{P}(E)^2, \begin{cases} X = A \cup \left(R \cap \overline{S}\right) \\ Y = A \cup \left(\overline{R} \cap S\right). \end{cases} \end{aligned}$$