
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1
Samedi 23 septembre 2023 (2h00)

L'énoncé est constitué de quatre exercices, d'un problème et comporte 3 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue réelle x .

1. $|x + 5| = 3x - 4$.
2. $x - 2 \leq \sqrt{x - 1}$.
3. $\lfloor x - 1 \rfloor = \lfloor 2x + 3 \rfloor$.

Exercice 2

1. Rappeler la valeur de $\sum_{k=1}^n k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

3. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$.

Indication : on pourra utiliser une récurrence forte.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lfloor |x| - 2 \rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = \lfloor |x - 2| \rfloor.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$.
2. Pour tout réel x , exprimer $f(x)$ en fonction de $\lfloor |x| \rfloor$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$
(b) Pour tout réel x , exprimer $g(x)$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Indication : on pourra commencer par déterminer la valeur de $f(0)$.

Problème

Soit E un ensemble et soit A une partie de E .

1. Le but de cette question est de trouver l'ensemble de tous les couples (X, Y) de parties de E qui vérifient l'égalité suivante :

$$X \cup Y = A,$$

c'est à dire de résoudre l'équation $X \cup Y = A$, d'inconnue $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$.

- (a) Vérifier que pour tout couple (R, S) de parties de E , les ensembles

$$\begin{cases} X = A \cap (\overline{R} \cup S) \\ Y = A \cap (R \cup \overline{S}) \end{cases}$$

vérifient l'égalité $X \cup Y = A$.

- (b) Réciproquement, montrer que pour tout couple (X, Y) de parties de E tel que $X \cup Y = A$, il existe un couple $(R, S) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que

$$\begin{cases} X = A \cap (\overline{R} \cup S) \\ Y = A \cap (R \cup \overline{S}). \end{cases}$$

- (c) Conclure.

2. (a) Montrer que pour tout couple (X, Y) de parties de E , on a l'équivalence suivante :

$$X \cap Y = A \Leftrightarrow \overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{A}.$$

- (b) Résoudre alors l'équation $X \cap Y = A$, d'inconnue $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$.

On pourra utiliser le résultat de la question 1.