

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°2

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $(a_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ des entiers consécutifs rangés dans l'ordre croissant tels que

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

- (a) On a pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $a_k = a_0 + k$, donc

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (a_0 + k) = \sum_{k=0}^n a_0 + \sum_{k=0}^n k = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} (a_0 + k) = \sum_{k=n+1}^{2n} a_0 + \sum_{k=n+1}^{2n} k = (2n - (n+1) + 1)a_0 + (2n - (n+1) + 1) \frac{n+1+2n}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\sum_{k=0}^n a_k = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = na_0 + \frac{n(3n+1)}{2}.}$$

- (b) On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k &\Leftrightarrow (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = na_0 + \frac{n(3n+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2}(3n^2 + n - n^2 - n) \\ &\Leftrightarrow \boxed{a_0 = n^2.} \end{aligned}$$

- (c) • Pour $n = 1$, on a $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ d'où $\boxed{1 + 2 = 3.}$
 • Pour $n = 2$, on a $a_0 = 4, a_1 = 5, a_2 = 6, a_3 = 7, a_4 = 8$ d'où $\boxed{4 + 5 + 6 = 7 + 8.}$
 • Pour $n = 3$, on a $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 11, a_3 = 12, a_4 = 13, a_5 = 14, a_6 = 15$ d'où $\boxed{9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15.}$

2. Soient $(b_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ des entiers consécutifs rangés dans l'ordre croissant tels que

$$\sum_{k=0}^n b_k^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2.$$

(a) On a pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $b_k = b_0 + k$ donc

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n b_k^2 &= \sum_{k=0}^n (b_0 + k)^2 \\
 &= \sum_{k=0}^n b_0^2 + \sum_{k=0}^n 2kb_0 + \sum_{k=0}^n k^2 \\
 &= (n+1)b_0^2 + 2b_0 \sum_{k=0}^n k + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= (n+1)b_0^2 + n(n+1)b_0 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^n b_k^2 = (n+1)b_0^2 + n(n+1)b_0 + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} (b_0 + k)^2 \\
 &= \sum_{k=n+1}^{2n} b_0^2 + 2b_0 \sum_{k=n+1}^{2n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 \\
 &= nb_0^2 + 2b_0 \times n \times \frac{n+1+2n}{2} + \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= nb_0^2 + (3n^2 + n)b_0 + \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= nb_0^2 + (3n^2 + n)b_0 + \frac{16n^3 + 12n^2 + 2n - 2n^3 - 3n^2 - n}{6}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2 = nb_0^2 + (3n^2 + n)b_0 + \frac{14n^3 + 9n^2 + n}{6}.}$$

(b) On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n b_k^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} b_k^2 \\
 \Leftrightarrow (n+1)b_0^2 + n(n+1)b_0 + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} &= nb_0^2 + (3n^2 + n)b_0 + \frac{14n^3 + 9n^2 + n}{6} \\
 \Leftrightarrow b_0^2 - 2n^2b_0 - 2n^3 - n^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

On obtient un trinôme du second degré en b_0 de discriminant

$$\Delta = 4n^4 + 4(2n^3 + n^2) = 4n^2(n^2 + 2n + 1) = (2n(n+1))^2 > 0.$$

Or, $b_0 = \frac{2n^2 - 2n(n+1)}{2} = -n < 0$ est impossible car $b_0 \in \mathbb{N}$ donc

$$b_0 = \frac{2n^2 + 2n(n+1)}{2} = 2n^2 + n = n(2n+1).$$

(c) • Pour $n = 1$, on a $b_0 = 3, b_1 = 4, b_2 = 5$ et $3^2 + 4^2 = 5^2$.

• Pour $n = 2$, on a $b_0 = 10, b_1 = 11, b_2 = 12, b_3 = 13, b_4 = 14$ et

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

• Pour $n = 3$, on a $b_0 = 21, b_1 = 22, b_2 = 23, b_3 = 24, b_4 = 25, b_5 = 26, b_6 = 27$ et

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Exercice 2.

1. (a) Pour $n = 0$, le produit est vide donc $P_0 = 1$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $P_{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} (1 - a_j) = \prod_{j=1}^n (1 - a_j) \times (1 - a_{n+1})$ donc

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (1 - a_{n+1})P_n.$$

(c) • Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 0$ car la somme est vide donc

$$P_0 + \sum_{k=1}^0 a_k P_{k-1} = P_0 = 1,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , i.e. $P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1$.

Montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$, i.e. $P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} = 1$.

On a

$$\begin{aligned} P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} &= (1 - a_{n+1})P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} + a_{n+1}P_n \\ &= P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} - a_{n+1}P_n + a_{n+1}P_n \\ &= P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci prouve la propriété au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on en conclut que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1.$$

2. (a) • On a $1 - \frac{n}{n} = 0$ donc un des termes du produit qui définit P_n (celui pour $j = n$) est nul, donc $\boxed{P_n = 0.}$
 • Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a

$$P_k = \prod_{j=1}^k \left(\frac{n-j}{n} \right) = \frac{\prod_{j=1}^k (n-j)}{\prod_{j=1}^k n} = \frac{\prod_{j=1}^k (n-j)}{n^k}.$$

Posons le changement d'indice $i = n - j$ dans le produit du numérateur. On obtient alors

$$\prod_{j=1}^k (n-j) = \prod_{i=n-k}^{n-1} i = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} i}{\prod_{i=1}^{n-k-1} i} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} = k! \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = k! \binom{n-1}{k}.$$

Finalement, on obtient bien que $\boxed{\text{pour tout } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P_k = \frac{k!}{n^k} \binom{n-1}{k}.}$

- (b) Pour $k = 0$, on a vu que $P_0 = 1$.

Par ailleurs, on a $0! = n^0 = \binom{n-1}{0} = 1$ donc $\frac{0!}{n^0} \binom{n-1}{0} = 1 = P_0$, ce qui montre que la formule est encore valable pour $k = 0$.

- (c) D'après la question 1.(c), on a $P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1$. Puisque $P_n = 0$ d'après la question

2.(a), on en déduit que $\sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} P_{k-1} = 1$ car pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{k}{n}$.

En posant le changement d'indice $i = k - 1$, on obtient $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} P_i = 1$.

Or, d'après les deux questions précédentes, on a pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$P_i = \frac{i!}{n^i} \binom{n-1}{i}.$$

Il en découle

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \frac{i!}{n^i} \binom{n-1}{i} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)!}{n^{i+1}} \binom{n-1}{i} = 1$$

et en effectuant de nouveau le changement d'indice $k = i + 1$, on trouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1.}$$