
DEVOIR MAISON N°3
A RENDRE POUR LE VENDREDI 20 OCTOBRE

Inversibilité à gauche et à droite

Dans tout le problème, on considère E, F et G trois ensembles non vides.

Un résultat du cours affirme que si $u : E \longrightarrow F$ est une application bijective, il existe une bijection réciproque $u^{-1} : F \longrightarrow E$ telle que $u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$ et $u \circ u^{-1} = \text{Id}_F$.

Le but de ce problème est d'établir des résultats analogues dans le cas où l'application u est seulement injective ou surjective.

1. Dans cette question, on considère $u : E \longrightarrow F$ et $v : E \longrightarrow G$ deux applications.

(a) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe une application $\alpha : F \longrightarrow G$ telle que $v = \alpha \circ u$.
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $u(x) = u(y) \Rightarrow v(x) = v(y)$.

Dans le cas où α existe, montrer de plus que si v est surjective, alors α est surjective et si u est surjective, alors α est unique.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ & \searrow v & \downarrow \alpha \\ & & G \end{array}$$

- (b) En déduire qu'il existe une application $\alpha : F \longrightarrow G$ telle que $\alpha \circ u = \text{Id}_E$ si et seulement si u est injective.

2. Dans cette question, on considère $u : E \longrightarrow F$ et $v : G \longrightarrow F$.

(a) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe une application $\beta : G \longrightarrow E$, $v = u \circ \beta$.
- $v(G) \subset u(E)$.

Dans le cas où β existe, montrer de plus que si v est injective, alors β est injective et si u est injective, alors β est unique.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ & \nwarrow \beta & \uparrow v \\ & & G \end{array}$$

- (b) En déduire qu'il existe une application $\beta : F \longrightarrow E$ telle que $u \circ \beta = \text{Id}_F$ si et seulement si u est surjective.