Corrigé du devoir maison n°3

Problème

1. (a) • Supposons qu'il existe une application $\alpha : F \longrightarrow G$ telle que $v = \alpha \circ u$.
Soient $(x, y) \in E^2$ tels que $u(x) = u(y)$. En appliquant α à cette égalité, on obtient $\alpha \circ u(x) = \alpha \circ u(y)$, i.e. $v(x) = v(y)$.
Ainsi, on a bien pour tout $(x, y) \in E^2, u(x) = u(y) \Rightarrow v(x) = v(y)$, ce qui montre que i)⇒ii).
• Réciproquement, supposons que pour tout $(x, y) \in E^2, u(x) = u(y) \Rightarrow v(x) = v(y)$.
Construisons alors une application $\alpha : F \longrightarrow G$ telle que $v = \alpha \circ u$.
Soit $y \in F$.
- Si $y \in u(E)$, alors il existe un élément $x \in E$ tel que $u(x) = y$. S'il existe un autre élément $x' \in E$ tel que $u(x') = y$, alors par hypothèse, puisque $u(x) = u(x')$, on a $v(x) = v(x')$.
On peut donc poser sans ambiguïté $\alpha(y) = v(x)$ (on vient de voir que $v(x)$ ne dépend pas de l'antécédent de y choisi) et on a alors $\alpha \circ u(x) = \alpha(y) = v(x)$.
- Si $y \notin u(E)$, on a le choix : on peut choisir n'importe quel élément $z \in G$ et poser $\alpha(y) = z$.
On peut donc par exemple poser l'application α suivante :

$$\begin{array}{rcl} \alpha : F & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} v(x) & \text{si } y \in u(E) \text{ et } u(x) = y, x \in E \\ a & \text{si } y \notin u(E) \end{array} \right. \end{array}$$

où a est un élément quelconque de G fixé.
On a bien pour tout $x \in E, \alpha \circ u(x) = \alpha(u(x)) = v(x)$ par définition de α donc $v = \alpha \circ u$.
On a donc bien montré que ii)⇒i), d'où l'équivalence entre les deux assertions.
• Supposons qu'une telle application α existe.
- Si v est surjective, alors $\alpha \circ u$ est surjective, ce qui implique que α est surjective.
- Supposons que u est surjective. Montrons alors qu'il existe une unique application $\alpha : F \longrightarrow G$ telle que $v = \alpha \circ u$.
Supposons qu'il existe une autre application $\alpha' : F \longrightarrow G$ telle que $v = \alpha' \circ u$ et montrons que $\alpha = \alpha'$.
Soit $y \in F$. Puisque u est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.
On a alors $\alpha(y) = \alpha(u(x)) = \alpha \circ u(x) = v(x)$ et $\alpha'(y) = \alpha'(u(x)) = \alpha' \circ u(x) = v(x)$ donc $\alpha(y) = \alpha'(y)$ et ce pour tout $y \in F$, ce qui implique que $\alpha = \alpha'$ et prouve l'unicité de α.

(b) Il suffit d'appliquer la question précédente pour $G = E$ et $v = \mathrm{Id}_E$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \exists \alpha : F \longrightarrow E, \mathrm{Id}_E = \alpha \circ u & \Leftrightarrow & (\forall (x, y) \in E^2, u(x) = u(y) \Rightarrow \mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E(y)) \\ & \Leftrightarrow & (\forall (x, y) \in E^2, u(x) = u(y) \Rightarrow x = y) \\ & \Leftrightarrow & u \text{ est injective} \end{array}$$

De plus, dans le cas où u est surjective, α est unique : en effet, on a dans ce cas que u est bijective et alors $\alpha = u^{-1}$.

2. (a) • Supposons qu'il existe une application $\beta : G \longrightarrow E$ telle que $v = u \circ \beta$. Montrons que $v(G) \subset u(E)$.

Soit $y \in v(G)$. Il existe $x \in G$ tel que $y = v(x) = u \circ \beta(x) = u(\beta(x)) \in u(E)$ car $\beta(x) \in E$.

On a donc bien montré l'inclusion $v(G) \subset u(E)$, ce qui prouve l'implication i)⇒ii).

• Réciproquement, supposons que $v(G) \subset u(E)$ et montrons qu'il existe une application $\beta : G \longrightarrow E$ telle que $v = u \circ \beta$.

Soit $x \in G$. Alors $v(x) \in F$ et par hypothèse $v(G) \subset u(E)$ donc $v(x) \in u(E)$. On en déduit qu'il existe $x' \in E$ tel que $u(x') = v(x)$.

Posons alors $\beta(x) = x' \in E$. On a alors $u(\beta(x)) = u(x') = v(x)$. (S'il existe un autre élément $x'' \in E$ tel que $u(x'') = v(x)$, on aurait pu également choisir de poser $\beta(x) = x''$ et on aurait également eu $u(\beta(x)) = u(x'') = v(x)$).

En faisant ceci pour tout $x \in G$, ceci définit bien une application $\beta : G \longrightarrow E$ qui vérifie pour tout $x \in G, u \circ \beta(x) = v(x)$ d'où $u \circ \beta = v$.

On a donc bien montré l'implication ii)⇒i), d'où l'équivalence entre les deux assertions.

• Supposons qu'une telle application β existe.

- Si v est injective, alors $u \circ \beta$ est injective, ce qui implique que β est injective.

- Supposons que u est injective. Montrons alors qu'il existe une unique application $\beta : G \longrightarrow E$ telle que $v = u \circ \beta$.

Pour cela, on suppose qu'il existe une autre application $\beta' : G \longrightarrow E$ telle que $v = u \circ \beta'$ et montrons que $\beta = \beta'$.

Soit $x \in G$. On a alors $v(x) = u(\beta(x)) = u(\beta'(x))$. Par injectivité de u, ceci implique que $\beta(x) = \beta'(x)$ et ce pour tout $x \in G$ donc $\beta = \beta'$, d'où l'unicité de β.

(b) Il suffit d'appliquer la question précédente pour $G = F$ et $v = \mathrm{Id}_F$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\exists \beta : F \longrightarrow E, \mathrm{Id}_F = u \circ \beta &\Leftrightarrow \mathrm{Id}_F(F) \subset u(E) \\
&\Leftrightarrow F \subset u(E) \\
&\Leftrightarrow u(E) = F \quad \text{car } u(E) \subset F \\
&\Leftrightarrow u \text{ est surjective.}
\end{aligned}$$

De plus, dans le cas où u est injective, β est unique : en effet, dans ce cas u est bijective et alors $\beta = u^{-1}$.