

Liste d'exercices n°6

Trigonométrie

Exercice 1. Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer les formules suivantes :

$$1. \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$2. \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$3. \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$4. \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Exercice 2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3a)$, $\cos(4a)$, $\sin(3a)$, $\sin(4a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis sur $] -\pi; \pi]$.

$$1. \sin(x) = -\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$$

$$4. \sin(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2. \sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$5. \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$3. \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$6. \cos(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

$$1. \tan(x) = \sqrt{3}$$

$$4. 2\cos(3x) = 1$$

$$2. \sin(2x) = \sqrt{3}$$

$$5. \tan(2x) = -1$$

$$3. \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

$$1. \sin(x) < \pi$$

$$4. \tan(x) > \sqrt{3}$$

$$2. \sin(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. \cos(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$3. \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6. \sin(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

$$1. \sqrt{3} \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$$

$$4. 2 \cos^2(x) = 7 \cos(x) - 3$$

$$2. \sqrt{3} \cos(7x) - \sin(7x) = 1$$

$$5. \begin{cases} 2 \sin(x) - 4 \cos(x) &= \sqrt{3} + 2 \\ \sin(x) + \sqrt{3} \cos(x) &= 0 \end{cases}$$

$$3. \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 2 \cos(x)$$

Exercice 8. Comment doit-on choisir w pour que l'équation suivante

$$1 + \sin^2(wx) = \cos(x),$$

d'inconnue x réelle ait une unique solution ?

Exercice 9. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right).$$

Exercice 10. Soit θ un réel tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$.

On pose $t = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$.

Montrer que

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Exercice 11. Résoudre l'équation $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$, où n est un entier strictement positif.

Exercice 12. Soient a, b, c, d des éléments de $[0, \pi]$.

$$1. \text{ Montrer que } \sin(a) + \sin(b) \leq 2 \sin \left(\frac{a + b}{2} \right).$$

$$2. \text{ En déduire que } \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) \leq 4 \sin \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right).$$

$$3. \text{ Montrer que } \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq 3 \sin \left(\frac{a + b + c}{3} \right).$$

Exercice 13. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S = \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\theta).$$

(Indication : calculer $2 \sin(\theta)S$ et faire apparaître une somme télescopique.)

Exercice 14. Calculer la somme suivante en fonction de θ et de n :

$$S = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta).$$