Lycée Fénelon | BCPST1
Année 2023-2024 | A. Panetta

Corrigé du devoir maison n°4

Combinaisons avec répétition

1. Soit $E = \{a, b, c\}$.
   - Pour $p = 1$, les 1-combinaisons de E avec répétition sont
   $$< a >, < b >, < c > .$$
   On a donc $\boxed{\Gamma_3^1 = 3.}$
   - Pour $p = 2$, les 2-combinaisons de E avec répétition sont
   $$< a, a >, < a, b >, < a, c >, < b, b >, < b, c >, < c, c > .$$
   On a donc $\boxed{\Gamma_3^2 = 6.}$
   - Pour $p = 3$, les 3-combinaisons de E avec répétition sont
   $$< a, a, a >, < a, a, b >, < a, a, c >, < a, b, b >, < a, b, c >,$$
   $$< a, c, c >, < b, b, b >, < b, b, c >, < b, c, c >, < c, c, c > .$$
   On a donc $\boxed{\Gamma_3^3 = 10.}$
2. Comptons tout d'abord le nombre de dominos pour lesquels les deux nombres sont différents. Pour cela, il faut choisir 2 nombres parmi 7 (les nombres entre 0 et 6). Il y a donc $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ façons de choisir de tels dominos.
   Il faut ensuite ajouter les 7 dominos qui contiennent deux fois le même nombre (double 0, double 1,… double 6).
   $\boxed{\text{Il y a donc 28 dominos dans un jeu de dominos.}}$
   Ceci correspond exactement au nombre de 2-combinaisons avec répétition dans un ensemble à 7 éléments donc $\boxed{\Gamma_7^2 = 28.}$
3. - Une application strictement croissante est nécessairement injective. Or, il existe une application injective de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ si et seulement si $p \leqslant n$.
   Donc si $p > n$, il n'y a pas d'application strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. D'autre part, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ donc dans ce cas, le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ vaut bien $\binom{n}{p}$.
   - Supposons dorénavant que $p \leqslant n$. Dénombrons le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Il faut donc fixer les images $f(1), f(2), \ldots, f(p)$ telles que $f(1) < f(2) < \cdots < f(p)$.
   Pour cela, il suffit de considérer une partie de $[\![1, n]\!]$ à p éléments (il y a $\binom{n}{p}$ façons de le faire) qui va constituer l'image de la fonction. Notons-la $\mathrm{Im}(f) = \{x_1, \ldots, x_p\}$ avec $x_1 < \cdots < x_p$.

Puisque f doit être strictement croissante, il faut poser $f(k) = x_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.
On a alors bien $f(1) = x_1 < f(2) = x_2 < \cdots < f(p) = x_p$.
Ainsi, la donnée d'une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ équivaut à la donnée d'une partie de $[\![1,n]\!]$ à p éléments. Il y a donc dans ce cas encore $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{il y a bien } \binom{n}{p} \text{ applications strictement croissantes de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n]\!].}$

4. • Montrons que g est strictement croissante.
Soient k et l deux entiers dans $[\![1,p]\!]$ tels que $k < l$. Montrons que $g(k) < g(l)$.
On a $g(l) - g(k) = f(l) + l - 1 - (f(k) + k - 1) = f(l) - f(k) + l - k$.
Puisque f est croissante et que $k < l$, alors $f(k) \leqslant f(l)$, i.e. $f(l) - f(k) \geqslant 0$ d'où $g(l) - g(k) \geqslant l - k$.
Or, $l - k > 0$ donc $g(l) - g(k) > 0$, ce qui prouve que $g(k) < g(l)$.
Ainsi, l'application g est bien strictement croissante.
• Montrons que g est à valeurs dans $[\![1, n+p-1]\!]$.
Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Alors $0 \leqslant k - 1 \leqslant p - 1$.
Puisque f est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ alors $1 \leqslant f(k) \leqslant n$.
Par somme de ces inégalités, on obtient $1 \leqslant f(k)+k-1 \leqslant n+p-1$, i.e. $g(k) \in [\![1, n+p-1]\!]$.
$\boxed{\text{L'application } g \text{ est donc bien strictement croissante de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n+p-1]\!].}$

5. (a) Soit $g \in F$. On suppose qu'il existe $f \in E$ telle que $\varphi(f) = g$.
Par définition de φ, ceci implique que pour tout $k \in [\![1,p]\!], g(k) = f(k) + k - 1$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1,p]\!], f(k) = g(k) - k + 1.}$$

(b) Soit $g \in F$.
Soit f définie sur $[\![1,p]\!]$ par $f(k) = g(k) - k + 1$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$. Puisque g est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors f est également à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrons que f est croissante sur $[\![1,p]\!]$.
Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![1,p-1]\!], f(k) \leqslant f(k+1)$.
Soit $k \in [\![1,p-1]\!]$.
On a $f(k+1) - f(k) = g(k+1) - (k+1) + 1 - (g(k) - k + 1) = g(k+1) - g(k) - 1$.
Or, l'application g est strictement croissante donc $g(k+1) > g(k)$, ce qui implique que $g(k+1) \geqslant g(k) + 1$ puisque g est à valeurs entières.
On en déduit que $g(k+1) - g(k) - 1 \geqslant 0$, ce qui prouve que $f(k+1) - f(k) \geqslant 0$, i.e. $f(k) \leqslant f(k+1)$.
$\boxed{\text{On a bien montré que l'application } f \text{ est croissante sur } [\![1,p]\!].}$

(c) Puisque f est croissante, alors pour tout $k \in [\![1,p]\!], f(1) \leqslant f(k) \leqslant f(p)$.
Or, $f(1) = g(1) - 1 + 1 = g(1) \geqslant 1$ car g est à valeurs dans $[\![1, n+p-1]\!]$.
De même, $f(p) = g(p) - p + 1$. Or g est à valeurs dans $[\![1, n+p-1]\!]$ donc $g(p) \leqslant n+p-1$ d'où $g(p) - p + 1 \leqslant n$.
Finalement, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!], 1 \leqslant f(1) \leqslant f(k) \leqslant f(p) \leqslant n$ donc

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est bien à valeurs dans } [\![1,n]\!].}$$

(d) Soit $g \in F$. D'après les deux questions précédentes, l'application f définie sur $[\![1,p]\!]$ par $f(k) = g(k) - k + 1$ est croissante et à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ donc $f \in E$.

De plus, on a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $f(k) + k - 1 = g(k)$ donc $g = \varphi(f)$.

Autrement dit, toute application $g \in F$ admet un antécédent $f \in E$ par φ, donc φ est surjective.

Par ailleurs, d'après la question 5.(a), si g admet un antécédent f par φ, alors l'expression de f est nécessairement $f(k) = g(k) - k + 1$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. Autrement dit, si g admet un antécédent par φ, alors cet antécédent est unique, ce qui prouve que φ est injective.

$\boxed{\text{Finalement, } \varphi \text{ est bien bijective.}}$

(e) Puisque $\varphi : E \longrightarrow F$ est une application bijective entre deux ensembles finis, alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Or, d'après la question 3., le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n+p-1]\!]$ est $\dbinom{n+p-1}{p}$.

$\boxed{\text{Il y a donc } \dbinom{n+p-1}{p} \text{ applications croissantes de } [\![1, p]\!] \text{ dans } [\![1, n]\!].}$

6. (a) • Soit f une application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors $< f(1), \dots, f(p) >$ est une p-combinaison avec répétition (puisque l'application f n'est pas nécessairement strictement croissante) d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

• Réciproquement, considérons une p-combinaison avec répétition d'éléments de $[\![1, n]\!]$. Rangeons-la par ordre croissant et notons-la $< x_1, \dots, x_p >$ avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p$.

Alors l'application $\begin{array}{rccc} f : & [\![1, p]\!] & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \\ & k & \longmapsto & x_k \end{array}$ est croissante car pour tout couple d'entiers $(k, l) \in [\![1, p]\!]^2$, si $k \leqslant l$, alors $f(k) = x_k \leqslant x_l = f(l)$.

Ainsi, on a bien montré que toute application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ correspond à une unique p-combinaison avec répétition d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

Il y a donc autant d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ que de p-combinaisons avec répétition d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

(b) D'après la question 5.(e), on en déduit que

$$\boxed{\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}.}$$

Pour $p = 2$ et $n = 7$, on retrouve que $\Gamma_7^2 = \dbinom{7+2-1}{2} = \dbinom{8}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$.

(c) Le résultat (non ordonné) d'un lancer de trois dés à 6 faces identiques revient à se donner une 3-combinaison avec répétition de $[\![1, 6]\!]$.

Or, $\Gamma_6^3 = \dbinom{6+3-1}{3} = \dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$.

$\boxed{\text{Il y a donc 56 tirages non ordonnés possibles.}}$

7. (a) Soit m un entier naturel non nul fixé.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k}{k}$.

• **Initialisation :** Pour $k = 0$, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m-1}{0} = 1$ (on a bien $m - 1 \in \mathbb{N}$ car $m \in \mathbb{N}^*$).

D'autre part, $\binom{m+0}{0} = 1$ donc on a bien $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+0}{0}$, ce qui prouve la propriété au rang $k = 0$.

• **Hérédité :** Soit k un entier naturel fixé tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k}{k}$.

Montrons la propriété au rang $k+1$, i.e. vérifions que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k+1}{k+1}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} \binom{m+i-1}{i} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{m+i-1}{i} + \binom{m+k+1-1}{k+1} \\
&= \binom{m+k}{k} + \binom{m+k}{k+1} \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&= \binom{m+k+1}{k+1} \quad \text{(Relation de Pascal)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.
La formule est donc vraie pour tout entier naturel k et pour tout entier naturel m non nul (puisque celui-ci a été fixé arbitrairement).

On a donc bien $\boxed{\forall (m,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{m+i-1}{i} = \binom{m+k}{k}.}$

(b) Puisque $\binom{n+0-1}{0} = 1$, on a bien vu la convention de l'énoncé $\Gamma_n^0 = \binom{n+0-1}{0}$.

On a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \Gamma_n^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+p}{p}$ d'après la question précédente.

Or, d'après la question 6.(b), $\Gamma_{n+1}^p = \binom{n+1+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$.

On a donc bien montré que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \Gamma_n^k = \Gamma_{n+1}^p.}$

(c) Soit E un ensemble à $n+1$ éléments, soit a un élément fixé dans E.
On veut dénombrer le nombre de p-combinaisons avec répétition de E. Par définition, il y en a Γ_{n+1}^p.
Le nombre de p-combinaisons avec répétition de E ne contenant pas a vaut Γ_n^p (en effet, il faut choisir les p éléments de la combinaison parmi les n autres éléments de E.)
Le nombre de p-combinaisons avec répétition de E contenant une seule fois a vaut Γ_n^{p-1} (en effet, il faut choisir les $p-1$ éléments restants de la combinaison parmi les n autres éléments de E.)
Le nombre de p-combinaisons avec répétition de E contenant deux fois a vaut Γ_n^{p-2} (en effet, il faut choisir les $p-2$ éléments restants de la combinaison parmi les n autres éléments de E.)
Plus généralement, pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, le nombre de p-combinaisons avec répétition de E contenant i fois a vaut Γ_n^{p-i} (en effet, il faut choisir les $p-i$ éléments restants de la combinaison parmi les n autres éléments de E.)

Ceci couvre tous les cas possibles donc

$$\Gamma_{n+1}^{p}=\sum_{i=0}^{p}\Gamma_{n}^{p-i}.$$

En posant le changement d'indice $k=p-i$, on retrouve bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\Gamma_{n}^{k}=\Gamma_{n+1}^{p}.}$$

8. • Montrons qu'il y a auant de p-uplets $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tels que $x_1+\dots+x_p\leqslant n$ que d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.
Soit $(x_1,\dots,x_p)$ un tel p-uplet. Puisque les x_k sont des entiers naturels dont la somme est inférieure ou égale à n, on a nécessairement pour tout $k\in[\![1,p]\!], x_k\in[\![0,n]\!]$.
Ce p-uplet mène naturellement à l'application f suivante :

$$f:\begin{array}{ccc}[\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!]\\ k & \longmapsto & 1+\sum_{i=1}^{k}x_i.\end{array}$$

L'application f est bien croissante car pour tout $k\in[\![1,p-1]\!], f(k+1)-f(k)=x_{k+1}\geqslant 0$ et elle est bien à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$ car pour tout $k\in[\![1,p]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{k}x_i\in[\![0,n]\!]$.
Réciproquement, considérons une application $f:[\![1,p]\!]\longrightarrow[\![1,n+1]\!]$ croissante. Déduisons-en un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tels que $x_1+\dots+x_p\leqslant n$.
Considérons le p-uplet $(x_1,\dots,x_p)=(f(1)-1,f(2)-f(1),\dots,f(p)-f(p-1))$.
Tout d'abord, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, on a bien $x_k\geqslant 0$ car $f(1)\geqslant 1$ et pour tout $k\in[\![2,p]\!], x_k=f(k)-f(k-1)\geqslant 0$ puisque l'application f est croissante.
De plus, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}x_k=f(p)-1\leqslant n$ car $f(p)\leqslant n+1$.
Il y a donc autant de p-uplets $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tels que $x_1+\dots+x_p\leqslant n$ que d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.
Or, d'après la question 5.e), il y a $\displaystyle\binom{n+1+p-1}{p}=\binom{n+p}{p}$ applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.
On en déduit qu' $\boxed{\text{il y a }\binom{n+p}{p}\text{ tels }p\text{-uplets.}}$

• Dénombrons désormais les p-uplets $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tels que $x_1+\dots+x_p=n$.
On reprend la même méthode que précédemment en associant à un tel p-uplet une unique application croissante $f:[\![1,p]\!]\longrightarrow[\![1,n+1]\!]$. Dans ce cas, puisque $n=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}x_k=f(p)-1$, on a nécessairement $f(p)=n+1$. Il reste donc à fixer les images $f(1),\dots,f(p-1)$.
Il y a donc autant de p-uplets $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p$ tels que $x_1+\dots+x_p=n$ que d'applications croissantes de $[\![1,p-1]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.
D'après la question 5.e), il y a $\displaystyle\binom{n+1+p-1-1}{p-1}=\binom{n+p-1}{p-1}$ applications croissantes de $[\![1,p-1]\!]$ dans $[\![1,n+1]\!]$.
On en déduit qu' $\boxed{\text{il y a }\binom{n+p-1}{p-1}\text{ tels }p\text{-uplets.}}$

9. Notons les tiroirs de 1 à b. Le rangement des a chaussettes peut s'exprimer par une a-combinaison à répétition de l'ensemble $[\![1, b]\!]$ consituée de tous les numéros de tiroirs (avec répétition éventuellement) dans lesquels sont rangés les a chaussettes.

   $\boxed{\text{Il y a donc } \Gamma_b^a \text{ rangements possibles.}}$