

Corrigé de la liste d'exercices n°6

Trigonométrie

Exercice 1

1.

$$\cos(p) + \cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2.

$$\cos(p) - \cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) - \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3.

$$\sin(p) + \sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

4.

$$\sin(p) - \sin(q) = \sin(p) + \sin(-q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Exercice 2

On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(a)\cos(b)(\tan(a) + \tan(b))}{\cos(a)\cos(b)(1 - \tan(a)\tan(b))}$$

$$\text{d'où } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Pour $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = -\frac{\pi}{4}$, on en déduit

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} \cos(3a) &= \cos(2a + a) \\ &= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a) \\ &= (2\cos^2(a) - 1)\cos(a) - 2\sin^2(a)\cos(a) \\ &= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2(1 - \cos^2(a))\cos(a) \\ &= 4\cos^3(a) - 3\cos(a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(3a) &= \sin(2a + a) \\ &= \sin(2a)\cos(a) + \sin(a)\cos(2a) \\ &= 2\sin(a)\cos^2(a) + \sin(a)(1 - 2\sin^2(a)) \\ &= 2\sin(a)(1 - \sin^2(a)) + \sin(a) - 2\sin^3(a) \\ &= 2\sin(a) - 2\sin^3(a) + \sin(a) - 2\sin^3(a) \\ &= 3\sin(a) - 4\sin^3(a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(4a) &= \cos(2 \times 2a) \\
&= 2\cos^2(2a) - 1 \\
&= 2(2\cos^2(a) - 1)^2 - 1 \\
&= 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(4a) &= \sin(2 \times 2a) \\
&= 2\sin(2a)\cos(2a) \\
&= 2(2\sin(a)\cos(a))(1 - 2\sin^2(a)) \\
&= 4\sin(a)\cos(a) - 8\sin^3(a)\cos(a).
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. $\sin(x) = -\sin(\frac{7\pi}{5}) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-\frac{7\pi}{5}) \Leftrightarrow x \equiv -\frac{7\pi}{5}[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - (-\frac{7\pi}{5})[2\pi]$ d'où $x \equiv \frac{3\pi}{5}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{2\pi}{5}[2\pi]$.

Les solutions sur $] -\pi, \pi]$ sont $\{\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\}$.

2. $\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $2x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{12}[\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{12}[\pi]$.

Les solutions sur $] -\pi, \pi]$ sont $\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\}$.

3. $\sin(3x) = \sin(\frac{\pi}{5}) \Leftrightarrow 3x \equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$ ou $3x \equiv \pi - \frac{\pi}{5}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{15}[\frac{2\pi}{3}]$ ou $x \equiv \frac{4\pi}{15}[\frac{2\pi}{3}]$.

Les solutions sur $] -\pi, \pi]$ sont $\{-\frac{9\pi}{15}, -\frac{6\pi}{15}, \frac{\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{11\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}\}$.

4. $\sin(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - (-\frac{\pi}{2})[2\pi]$ d'où $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La seule solution sur $] -\pi, \pi]$ est $-\frac{\pi}{2}$.

5. $\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3} + x) \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3} + x[2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{3} - x[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{9}[\frac{2\pi}{3}]$.

Les solutions sur $] -\pi, \pi]$ sont $\{-\frac{7\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}\}$.

6.

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right) &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{2x}{3}[2\pi] \\
&\Leftrightarrow \frac{5x}{3} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } \frac{x}{3} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\
&\Leftrightarrow x \equiv \frac{3\pi}{10}\left[\frac{6\pi}{5}\right] \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{2}[6\pi].
\end{aligned}$$

Les solutions sur $] -\pi, \pi]$ sont $\{-\frac{9\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\}$.

Exercice 5

1. $\tan(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(x) = \tan(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

2. $\sin(2x) = \sqrt{3}$ n'a pas de solution réelle car $\sqrt{3} > 1$.

3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - (-\frac{\pi}{4})[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

$$4. \quad 2 \cos(3x) = 1 \Leftrightarrow \cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 3x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ donc}$$

$$x \equiv \frac{\pi}{9} \left[\frac{2\pi}{3} \right] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{9} \left[\frac{2\pi}{3} \right].$$

$$5. \quad \tan(2x) = -1 \Leftrightarrow \tan(2x) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 6

$$1. \quad \mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

$$2. \quad \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right].$$

$$3. \quad \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right].$$

$$4. \quad \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right].$$

$$5. \quad \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right].$$

$$6. \quad \text{On a } \sin(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin(x) \geq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ donc } \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

Exercice 7

1.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{6} \equiv \pi - \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(7x) - \sin(7x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(7x) - \frac{1}{2} \sin(7x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(7x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(7x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow 7x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 7x + \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow 7x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 7x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{42} \left[\frac{2\pi}{7} \right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{14} \left[\frac{2\pi}{7} \right]. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) = \cos(x) \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) = \cos(x) \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x) \\
 &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \equiv x[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x + \frac{\pi}{3} \equiv -x[2\pi] \\
 &\Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right].
 \end{aligned}$$

4. $2\cos^2(x) = 7\cos(x) - 3 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 7\cos(x) + 3 = 0.$

On pose $X = \cos(x)$.

Le trinôme du second degré a pour discriminant

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (2) \times 3 = 49 - 24 = 25 > 0$$

donc les racines sont $X_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{7+5}{4} = 3.$

Ainsi, on a $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = 3$. La deuxième option est impossible donc l'équation équivaut à $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

5.
$$\begin{cases} 2\sin(x) - 4\cos(x) = \sqrt{3} + 2 \\ \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}\cos(x) - 4\cos(x) = \sqrt{3} + 2 \\ \sin(x) = -\sqrt{3}\cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}} \\ \sin(x) = -\sqrt{3}\cos(x) \end{cases} .$$

Ainsi, $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3}+2)(4-2\sqrt{3})}{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 8

On a pour tout réel x , $\cos(x) \leq 1$ et $1 + \sin^2(wx) \geq 1$ donc si $1 + \sin^2(wx) = \cos(x)$, alors nécessairement $1 + \sin^2(wx) = \cos(x) = 1$ donc $\sin(wx) = 0$ et $\cos(x) = 1$.

Ceci équivaut à $wx \equiv 0[\pi]$ et $x \equiv 0[2\pi]$. On voit que $x = 0$ est toujours solution de l'équation, sans aucune hypothèse sur w .

Supposons qu'il existe une autre solution x non nulle à l'équation.

Puisque $x \equiv 0[2\pi]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$, avec k non nul car x est non nul.

Par ailleurs, puisque $wx \equiv 0[\pi]$, on a $2k\pi w \equiv 0[\pi]$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi w = k'\pi$.

On peut diviser par k puisque k est non nul et on obtient $w = \frac{k'}{2k}$, ce qui implique que w est rationnel.

Ainsi, si l'équation admet plusieurs solutions, alors w est rationnel.

Réciproquement, supposons que $w = \frac{p}{q}$ est rationnel, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x = 2\pi qk$ est solution car $x \equiv 0[2\pi]$ et $wx = 2\pi pk \equiv 0[\pi]$, ce qui fournit une infinité de solutions.

Finalement, l'équation admet une unique solution (qui sera $x = 0$) si et seulement si w est irrationnel.

Exercice 9

Montrons le résultat par récurrence sur $n \geq 2$.

• **Initialisation** : pour $n = 2$, on a $2 \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Il y a bien $2 - 1 = 1$ chiffre 2 sous la racine, donc la propriété est vérifiée pour $n = 2$.

• **Hérédité** : Soit $n \geq 2$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n . Montrons-la au rang

$n + 1$, i.e. montrons que $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

On a

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ chiffres } 2}} = \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ donc $2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ d'où

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right|.$$

Or, $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geq 0$, ce qui assure que $\left| \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right| = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Finalement, on a bien $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ chiffres } 2} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, ce qui prouve la propriété au rang

$n + 1$ et achève la récurrence.

Exercice 10

On a $\cos(\theta) = \frac{\cos(2 \times \frac{\theta}{2})}{1} = \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

De même, $\sin(\theta) = \frac{\sin(2 \times \frac{\theta}{2})}{1} = \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} \frac{2 \tan(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{2t}{1 + t^2}$ d'où

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Exercice 11

• Si $n = 1$, l'équation est $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

On a

$$\cos(x) + \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui équivaut à

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } x \equiv 0[2\pi].$$

• Si $n = 2$, l'équation est $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ qui est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Supposons que $n > 2$. On remarque que $x \equiv 0[2\pi]$ et $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ sont toujours solutions de l'équation.

Il y a deux cas :

- Si n est pair, $x \equiv \pi[2\pi]$ et $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ sont solutions de l'équation.

- Si n est impair, $x \equiv \pi[2\pi]$ et $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ne sont pas solutions de l'équation.

Montrons maintenant que pour tout $n > 2$, si $x \not\equiv 0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors x n'est pas solution de l'équation.

En effet, dans ce cas, on a $0 < |\cos(x)| < 1$ et $0 < |\sin(x)| < 1$ donc puisque $n > 2$, on a

$$|\cos^n(x) + \sin^n(x)| \leq |\cos(x)|^n + |\sin(x)|^n < |\cos(x)|^2 + |\sin(x)|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Exercice 12

Soient a, b, c, d des éléments de $[0, \pi]$.

1. D'après la formule montrée dans le premier exercice, on a

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Or, par hypothèse, $\frac{a+b}{2} \in [0, \pi]$ donc $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0$ et $\frac{a-b}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $0 \leq \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \leq 1$.

On en déduit que $0 \leq 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \leq 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$, ce qui prouve que $\sin(a) + \sin(b) \leq 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

2. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) &\leq 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{c+d}{2}\right) \\ &\leq 2 \left(\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin\left(\frac{c+d}{2}\right) \right) \\ &\leq 2 \left(2 \sin\left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}\right) \right) \text{ car } \frac{a+b}{2} \in [0, \pi] \text{ et } \frac{c+d}{2} \in [0, \pi] \\ &\leq 4 \sin\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right). \end{aligned}$$

3. En posant $d = \frac{a+b+c}{3}$, on a encore $d \in [0, \pi]$ donc d'après la question précédente,

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq 4 \sin\left(\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4}\right)$$

d'où

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq 4 \sin\left(\frac{4a+4b+4c}{12}\right),$$

i.e.

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq 4 \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

donc finalement

$$\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq 3 \sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Exercice 13

- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(2k-1)\theta \equiv 0[2\pi]$ donc $\cos((2k-1)\theta) = 1$ d'où $S = n$.
- Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(2k-1)\theta \equiv \pi[2\pi]$ donc $\cos((2k-1)\theta) = -1$ d'où $S = -n$.
- Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$ de telle sorte que $\sin(\theta) \neq 0$.

$$\text{On a } 2 \sin(\theta) S = \sum_{k=1}^n 2 \sin(\theta) \cos((2k-1)\theta) = \sum_{k=1}^n 2 \sin\left(\frac{(2k\theta) - ((2k-2)\theta)}{2}\right) \cos\left(\frac{2k\theta + (2k-2)\theta}{2}\right).$$

En appliquant une formule du premier exercice, on obtient une somme télescopique :

$$2 \sin(\theta) S = \sum_{k=1}^n \sin(2k\theta) - \sin(2(k-1)\theta) = \sin(2n\theta) - \sin(0) = \sin(2n\theta)$$

$$\text{d'où } S = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin(\theta)}.$$

Exercice 14

- Si $\theta \equiv 0[\pi]$, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\cos^2(k\theta) = 1$ donc $S = n+1$.
- Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$ de telle sorte que $\sin(\theta) \neq 0$.

$$\text{Pour tout } 0 \leq k \leq n, \cos^2(k\theta) = \frac{\cos(2k\theta) + 1}{2} \text{ donc}$$

$$2 \sin(\theta) S = \sum_{k=0}^n \sin(\theta) \cos(2k\theta) + (n+1) \sin(\theta).$$

D'après une formule du premier exercice, on a

$$\sin(\theta) \cos(2k\theta) = \frac{1}{2}(\sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta))$$

donc

$$2 \sin(\theta) S = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta)) + (n+1) \sin(\theta) = \frac{1}{2}(\sin(2n+1)\theta - \sin(-\theta)) + (n+1) \sin(\theta)$$

d'où

$$S = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{4 \sin(\theta)} + \frac{1}{4} + \frac{n+1}{2} = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{4 \sin(\theta)} + \frac{2n+3}{4}.$$