

## Liste d'exercices n°7

## Nombres complexes

**Exercice 1.** Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants.

1.  $(2 - 5i)(3 + i)$

2.  $\frac{3 + 2i}{i - 1}$

3.  $(1 - i)^{32}$

4.  $(2 - i)^3$

5.  $\frac{1}{1 + i}$

6.  $(12 + 5i)(3 - i)$

7.  $\frac{i - 3}{i + 2}$

8.  $\frac{(3 + 2i)}{(1 + i)(i - 1)}$

9.  $\frac{7 + 3i}{1 - i} + 2i$

**Exercice 2.** Soient  $M$  et  $M'$  deux points du plan d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

Montrer que le milieu du segment  $[MM']$  a pour affixe  $\frac{z + z'}{2}$ .

**Exercice 3.** Montrer que si  $|z| = |z'| = 1$  et si  $1 + zz' \neq 0$ , alors le nombre  $\frac{z + z'}{1 + zz'}$  est réel.

**Exercice 4.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z \in \mathbb{C}$  tels que

1.  $\frac{z + 1}{z - 1}$  soit réel ;

2.  $\frac{z + 1}{z - 1}$  soit imaginaire pur.

**Exercice 5.** Donner une écriture trigonométrique/exponentielle des nombres complexes suivants.

1.  $-3i$

2.  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.  $1 - i\sqrt{3}$

4.  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + i\sqrt{3})$

5.  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

6.  $3 + i\sqrt{3}$

7.  $1 + i$

8.  $(1 - i)(-1 + i\sqrt{3})$

9.  $(1 - i)^7$

10.  $\frac{\sqrt{2} - 1 - i}{2i}$

11.  $-3 \exp(4)$

**Exercice 6.** Soit  $\alpha$  un réel. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1.  $(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^4$

2.  $-\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$

3.  $\cos(-\alpha) + i \sin(\alpha)$

4.  $-2i \cos(\alpha) + 2 \sin(\alpha)$

5.  $\sin(\alpha) + i \cos(\alpha)$

6.  $1 + i \tan(\alpha)$

7.  $1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ .

**Exercice 7.** Déterminer le module et un argument de  $-\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

**Exercice 8.** Soient  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ .

Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Re}(z_i \bar{z}_j).$$

**Exercice 9.**

1. Trouver les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 = i$ .
2. Trouver les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 = -i$ .
3. En déduire la factorisation dans  $\mathbb{C}$  du polynôme  $x^4 + 1$  en quatre facteurs de degré 1.
4. En déduire la factorisation dans  $\mathbb{R}$  du polynôme  $x^4 + 1$  en deux facteurs de degré 2.

**Exercice 10.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z$  complexe.

1.  $z + 2i = iz - 1$
2.  $2z + \bar{z} = 2 + 3i$
3.  $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$
4.  $3\bar{z} + 3z - 2 + 3i = 0$

**Exercice 11.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z$  complexe.

1.  $5 + 2z^2 + 6z = 0$
2.  $-z^2 - z + 6 = 0$
3.  $z^2 + z + 1 = 0$
4.  $\frac{3z - 2}{z + 1} = -3z + 2$

**Exercice 12.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z$  complexe.

1.  $z^2 = 3 + 4i$
2.  $z^2 = 8 - 6i$

**Exercice 13.** Soit  $u \in ]0; \pi[$ . On considère l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$z^2 + 2[1 - \cos(u)]z + 2[1 - \cos(u)] = 0.$$

Trouver les solutions de cette équation et les mettre sous forme trigonométrique.

**Exercice 14.** Soit  $x$  un réel. Linéariser les expressions suivantes.

1.  $\cos^4(x)$
2.  $\cos^4(x) \sin^2(x)$
3.  $\sin^5(x)$

**Exercice 15.** Soit  $x$  un réel. Délinéariser les expressions suivantes.

1.  $\cos(4x)$
2.  $\sin(6x)$
3.  $\cos(3x)$
4.  $\sin(3x)$
5.  $\cos(7x)$
6.  $\sin(7x)$

**Exercice 16.** Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose  $C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$ .

Calculer  $C_n(x)$  et  $S_n(x)$ .

(Indication : penser à la formule de Moivre.)

**Exercice 17.** Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $x$  un réel.

1. Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$ .
2. Calculer  $\sum_{1 \leq 2k \leq n} (-3)^k \binom{n}{2k}$  à l'aide de  $(1 + i\sqrt{3})^n$ .

**Exercice 18.**

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , exprimer  $\cos(5x)$  en fonction de  $\cos(x)$ .
2. En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ .