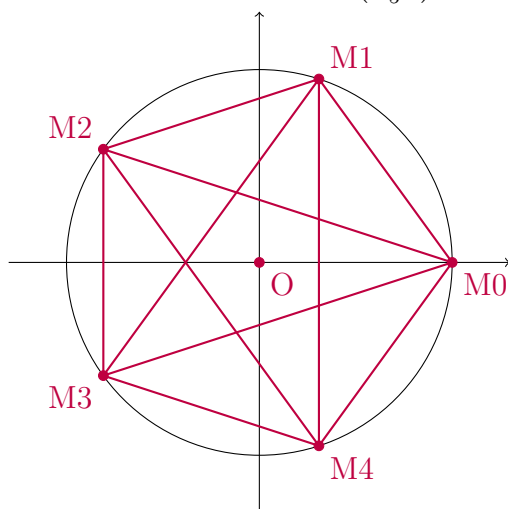

DEVOIR MAISON N°5
A RENDRE POUR LE MERCREDI 29 NOVEMBRE 2023

Diagonale d'un pentagone régulier

1. On pose $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $S = a + a^4$ et $T = a^2 + a^3$.
 - (a) Montrer que $S = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $T = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
 - (b) Calculer $S + T$ et ST .
 - (c) En déduire un trinôme du second degré dont les racines sont S et T .
 - (d) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. On considère le plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, on appelle M_k le point du plan d'affixe $z_k = \exp\left(\frac{2i\pi k}{5}\right)$.



- (a) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq 4$, $z_k^5 = 1$ et que $\sum_{k=0}^4 z_k = 0$.
(Les nombres z_k pour $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ sont appelés les racines 5-èmes de l'unité.)
- (b) Montrer que le pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ est régulier, c'est à dire que

$$M_0M_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_0,$$

$$(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}) = (\overrightarrow{OM_3}, \overrightarrow{OM_4}) = (\overrightarrow{OM_4}, \overrightarrow{OM_0}) = \frac{2\pi}{5}$$

et

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_4}) = (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_0}) = (\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_1}) = (\overrightarrow{M_3M_4}, \overrightarrow{M_3M_2}) = (\overrightarrow{M_4M_0}, \overrightarrow{M_4M_3}) = \frac{3\pi}{5}.$$

On appelle L la longueur d'un côté de ce pentagone.

- (c) On appelle diagonales du pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ les segments $[M_0M_2]$, $[M_1M_3]$, $[M_2M_4]$, $[M_3M_0]$ et $[M_4M_1]$.

Montrer que les diagonales ont toutes la même longueur D , puis que $\frac{D}{L} = \varphi$ où φ désigne le nombre d'or.

- (d) En déduire la longueur de la diagonale d'un pentagone régulier de côté 1.