Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°2
Samedi 18 novembre 2023 (3h00)

Exercice 1

1. On a

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\sin(x)\cos(x)-1 &\Leftrightarrow \cos(2x)=\sin(2x)-1\\
&\Leftrightarrow \cos(2x)-\sin(2x)=-1\\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x+\frac{\pi}{4}\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]\\
&\Leftrightarrow 2x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x\equiv-\pi[2\pi]\\
&\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{4}[\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{\pi}{2}[\pi]\\
&\Leftrightarrow \boxed{x\equiv\frac{\pi}{4}[\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv\frac{\pi}{2}[\pi].}
\end{aligned}$$

2. On sait que pour tout réel $x, \sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.
   Calculons $\sin(3x)$ pour tout réel x.

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x+x)\\
&= \sin(2x)\cos(x)+\sin(x)\cos(2x)\\
&= 2\sin(x)\cos^2(x)+\sin(x)(1-2\sin^2(x))\\
&= 2\sin(x)(1-\sin^2(x))+\sin(x)-2\sin^3(x)\\
&= 2\sin(x)-2\sin^3(x)+\sin(x)-2\sin^3(x)\\
&= 3\sin(x)-4\sin^3(x).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0 &\Leftrightarrow \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\sin(x)-4\sin^3(x)=0\\
&\Leftrightarrow 4\sin(x)-4\sin^3(x)+2\sin(x)\cos(x)=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin(x)(2-2\sin^2(x)+\cos(x))=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin(x)(2(1-\sin^2(x))+\cos(x))=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin(x)(2\cos^2(x)+\cos(x))=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x)(2\cos(x)+1)=0\\
&\Leftrightarrow \sin(2x)(2\cos(x)+1)=0\\
&\Leftrightarrow \sin(2x)=0 \quad \text{ou} \quad 2\cos(x)+1=0\\
&\Leftrightarrow 2x\equiv 0[\pi] \quad \text{ou} \quad \cos(x)=-\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \boxed{x\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ou} \quad x\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi].}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1.

$$\tan(a-b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}=\frac{\cos(a)\cos(b)(\tan(a)-\tan(b))}{\cos(a)\cos(b)(1+\tan(a)\tan(b))}$$

d'où $\boxed{\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.}$

2. (a) • Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $0<\arctan(x)<\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, puisque $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}_+^*$, on a $0<\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2}<-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<0$.
Par somme, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$0-\frac{\pi}{2}<\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{\pi}{2}+0$$

donc $\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$, on a $-\frac{\pi}{2}<\arctan(x)<0$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$, puisque $\frac{1}{x}\in\mathbb{R}_-^*$, on a $-\frac{\pi}{2}<\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<0$ donc $0<-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{\pi}{2}$.
Par somme, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$,

$$-\frac{\pi}{2}+0<\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)<0+\frac{\pi}{2}$$

donc $\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x\in\mathbb{R}^*, \arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.}$$

(b) L'application tan est définie sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bien défini et on a d'après la question 1 : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\tan(\arctan(x)) - \tan(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\tan(\arctan(x))\tan(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Or, pour tout réel x, $\tan(\arctan(x)) = x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x-\frac{1}{x}}{1+x\times\frac{1}{x}} = \frac{x-\frac{1}{x}}{2}$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x^2-1}{2x}.}$$

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$(E) \Leftrightarrow \tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2-2x-1 = 0.$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-1) = 4+4 = 8 > 0$ donc il admet deux racines réelles distinctes que sont $x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\boxed{\mathcal{S} = \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}.}$

Problème 1 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Partie I : Premiers exemples

1. • Si $p > n$, il n'y a pas de surjection de I_n vers I_p donc $\boxed{S_{n,p} = 0 \text{ si } p > n.}$

   • Si $p = n$, puisque $\operatorname{card}(I_n) = \operatorname{card}(I_p)$, toute application de I_n vers I_p est surjective si et seulement si elle est bijective. Ainsi, il y a autant d'applications surjectives de I_n vers I_n que d'applications bijectives de I_n vers I_n. On en déduit que $\boxed{S_{n,p} = n! \text{ si } p = n.}$

2. • Pour $p = 1$, il y a une seule application de I_n vers $I_1 = \{1\}$: c'est l'application constante égale à 1 et elle est surjective donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{n,1} = 1.}$

   • Pour $p = 2$, il y a 2^n applications de I_n vers $I_2 = [\![1,2]\!]$. Elles sont toutes surjectives, hormis les deux applications constantes (celle égale à 1 et celle égale à 2).

   Il y a donc $2^n - 2$ applications surjectives de I_n vers I_2 donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{n,2} = 2^n - 2.}$

3. Dénombrons les applications $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ surjectives.

   Si $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ est surjective, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe $x_k \in I_{p+1}$ tel que $f(x_k) = k$. Les images des p éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont donc imposées. Il reste un élément $x_{p+1} \in I_{p+1}$ dont il faut choisir l'image dans I_p. Cette image $f(x_{p+1})$ aura nécessairement deux antécédents.

   Ainsi, si $f : I_{p+1} \longrightarrow I_p$ est surjective, un élément de I_p admet deux antécédents, et les $p-1$ autres en admettent exactement un.

Pour construire une telle application surjective, on commence par choisir l'élément de I_p qui aura deux antécédents : il y a p façons de choisir cet élément dans I_p.

Il faut ensuite choisir les deux antécédents de cet élément dans I_{p+1} : il y a $\binom{p+1}{2}$ façons de le faire, soit $\dfrac{p(p+1)}{2}$ possibilités.

Enfin, il faut mettre en bijection les $p-1$ éléments restants de I_{p+1} avec les $p-1$ éléments restants de I_p : il y a $(p-1)!$ façons de le faire.

Finalement, il y a $p \times \dfrac{p(p+1)}{2} \times (p-1)! = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}$ surjections de I_{p+1} vers I_p donc $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}.}$

Partie II : Cas général

1. Si $n \geqslant p$, il existe au moins une surjection de I_n vers I_p, par exemple l'application

$$\begin{array}{rcl} f : I_n & \longrightarrow & I_p \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \leqslant p \\ p & \text{si } k \geqslant p \end{cases} \end{array}$$

On en déduit que $\boxed{S_{n,p} > 0.}$

2. On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k 1^{p-k} = (1-1)^p = 0^p.$$

Or, p est un entier naturel non nul donc $0^p = 0$, ce qui prouve que $\boxed{\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0.}$

3. (a) Puisque $k \leqslant l \leqslant p$, on a $k \leqslant p$ et $l-k \leqslant p-k$ donc

$$\binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{(p-k)!}{(l-k)!(p-k-(l-k))!} = \frac{p!}{l!(p-l)!} \frac{l!}{k!(l-k)!}$$

d'où $\boxed{\binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}.}$

(b) • Supposons que $k < p$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}.$$

En posant le changement d'indice $i = l-k$, on trouve

$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k} \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^{i+k} \binom{p-k}{i} = (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{i=0}^{p-k} (-1)^i \binom{p-k}{i}.$$

Puisque $k < p$, on a $p-k > 0$ donc en appliquant le résultat de la question 2 de la partie II, on obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-k} (-1)^i \binom{p-k}{i} = 0.$

On en déduit donc que $\boxed{\text{si } k < p, \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} = 0.}$

- Si $k = p$, on trouve

$$\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} = \sum_{l=p}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{p} = (-1)^p \binom{p}{p} \binom{p}{p}$$

d'où

$$\boxed{\text{si } k = p, \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} = (-1)^p.}$$

4. Soit $k \in I_p$. Pour construire une application f de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments, il faut commencer par choisir les k éléments de I_p qui vont former l'image de f, ce qui peut se faire de $\binom{p}{k}$ façons.

   Il faut ensuite construire une surjection de I_n vers $\mathrm{Im}(f)$, c'est à dire une surjection de I_n vers un ensemble à k éléments (qui est donc en bijection avec I_k) : cela peut se faire de $S_{n,k}$ façons.

   $\boxed{\text{Finalement, il y a } \binom{p}{k} S_{n,k} \text{ applications de } I_n \text{ vers } I_p \text{ dont l'image contient } k \text{ élements.}}$

5. Pour tout $k \in I_p$, notons A_k l'ensemble des applications de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments.

   On rappelle qu'on note $I_p^{I_n}$ l'ensemble des applications de I_n vers I_p. On a alors

$$I_p^{I_n} = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$$

   où l'union est disjointe puisque pour toute application $f \in I_p^{I_n}$, il existe un unique entier $k \in I_p$ tel que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f)) = k$.

   On obtient alors $\mathrm{Card}(I_p^{I_n}) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k)$.

   Or, on sait que $\mathrm{Card}(I_p^{I_n}) = \mathrm{Card}(I_p)^{\mathrm{Card}(I_n)} = p^n$ et d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, p]\!], \mathrm{Card}(A_k) = \binom{p}{k} S_{n,k}$.

   On trouve donc bien $\boxed{p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}.}$

6. D'après la question précédente, on a pour tout $l \in [\![1, p]\!], l^n = \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} S_{n,k}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
(-1)^p \sum_{l=1}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} l^n &= (-1)^p \sum_{l=1}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} S_{n,k} \\
&= (-1)^p \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{l} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} S_{n,k} \\
&= (-1)^p \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} S_{n,k} \\
&= (-1)^p \sum_{k=1}^{p} S_{n,k} \sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k}.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 3.b) de la partie II, on sait que $\displaystyle\sum_{l=k}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{k} = 0$ si $k < p$ et vaut $(-1)^p$ si $k = p$. Il ne reste donc dans la double somme que le terme pour $k = p$. Il en découle que

$$(-1)^p \sum_{l=1}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} l^n = (-1)^p S_{n,p} \sum_{l=p}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} \binom{l}{p} = (-1)^p (-1)^p S_{n,p} = (-1)^{2p} S_{n,p} = S_{n,p}$$

donc

$$\boxed{S_{n,p} = (-1)^p \sum_{l=1}^{p} (-1)^l \binom{p}{l} l^n.}$$

Partie III : Calcul par récurrence des $S_{n,p}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $0 < p \leqslant n-1$.
   Soit φ une surjection de I_n vers I_p. Il y a $S_{n,p}$ façons de choisir φ.
   Soit φ_1 la restriction de φ à I_{n-1}.
   Il y a deux cas qui s'excluent :
   • Supposons que $\varphi_1 : I_{n-1} \longrightarrow I_p$ est surjective (ce qui est possible car $n-1 \geqslant p$). Il y a $S_{n-1,p}$ surjections de $I_{n-1,p}$. Il reste à fixer ensuite $\varphi(n) \in I_p$, ce qui laisse p choix.
   Ainsi, il y a $pS_{n-1,p}$ surjections de I_n vers I_p dont la restriction à I_{n-1} est surjective.
   • Supposons que $\varphi_1 : I_{n-1} \longrightarrow I_p$ n'est pas surjective.
   Par surjectivité de φ, pour tout $k \in I_p$, il existe $x_k \in I_n$ tel que $\varphi(x_k) = k$.
   Puisque φ_1 n'est pas surjective, ceci signifie que $\varphi(n)$ a un seul antécédent dans I_n, qui est forcément n (s'il en avait plus, il existerait $x_n \in I_{n-1}$ tel que $\varphi_1(x_n) = \varphi(n)$ et pour tout $k \in I_{p-1} \setminus \{\varphi(n)\}$, il existe $x_k \in I_{n-1}$ tel que $\varphi_1(x_k) = k$ donc φ_1 serait surjective).
   Il y a p possibilités pour choisir $\varphi(n)$ dans I_p.
   A ce stade, $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subset I_p \setminus \{\varphi(n)\}$.
   Toujours par surjectivité de φ, puisque pour tout $k \in I_p \setminus \{\varphi(n)\}$, il existe $x_k \in I_{n-1}$ tel que $\varphi(x_k) = k$, on a $\mathrm{Im}(\varphi_1) = I_p \setminus \{\varphi(n)\}$, i.e. $\varphi_1 : I_{n-1} \longrightarrow I_p \setminus \{\varphi(n)\}$ est surjective.
   Or, $I_p \setminus \{\varphi(n)\}$ est de cardinal $p-1$ donc est en bijection avec I_{p-1} et il y a $S_{n-1,p-1}$ surjections de I_{n-1} vers I_{p-1}.

Ainsi, il y a $pS_{n-1,p-1}$ surjections de I_n vers I_p dont la restriction à I_{n-1} n'est pas surjective.
En sommant les deux possibilités, on trouve bien que

$$\boxed{\text{si } 0 < p \leqslant n-1, S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}).}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   - D'après la formule trouvée en question précédente, on a (puisque $0 < p \leqslant (p+1)-1$) :

   $$S_{p+1,p} = p(S_{p,p} + S_{p,p-1}).$$

   D'après la question 1 de la partie I, on sait que $S_{p,p} = p!$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$S_{p+1,p} = p(p! + S_{p,p-1}).$$

   Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}$.
   Initialisation : Pour $p = 1$, on a $S_{p+1,p} = S_{2,1} = 1$ d'après la question 2 de la partie I.
   D'autre part, $(p+1)! \times \dfrac{p}{2} = 2! \times \dfrac{1}{2} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang $p = 1$.
   Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p+1,p} = (p+1)!\dfrac{p}{2}$.
   Montrons la propriété au rang $p+1$, i.e. $S_{p+2,p+1} = (p+2)! \times \dfrac{p+1}{2}$.
   On sait que

   $$S_{p+2,p+1} = (p+1)((p+1)! + S_{p+1,p}).$$

   D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit

   $$S_{p+2,p+1} = (p+1)\left((p+1)! + (p+1)!\frac{p}{2}\right) = (p+1)(p+1)!\frac{p+2}{2} = (p+2)! \times \frac{p+1}{2},$$

   ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.
   On a donc bien retrouvé que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+1,p} = (p+1)! \times \dfrac{p}{2}.}$
   - Toujours d'après la formule de la question précédente, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$S_{p+2,p} = p(S_{p+1,p} + S_{p+1,p-1}) = p\left((p+1)! \times \frac{p}{2} + S_{p+1,p-1}\right).$$

   Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$.
   Initialisation : Pour $p = 1$, on a encore $S_{p+2,p} = S_{3,1} = 1$.
   D'autre part, $\dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24} = \dfrac{1 \times 4 \times 3!}{24} = \dfrac{4 \times 6}{24} = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $p = 1$.
   Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$.
   Montrons la propriété au rang $p+1$, i.e.

   $$S_{p+3,p+1} = \frac{(p+1)(3(p+1)+1)(p+3)!}{24} = \frac{(p+1)(3p+4)(p+3)!}{24}.$$

   On sait que $S_{p+3,p+1} = (p+1)\left((p+2)! \times \dfrac{p+1}{2} + S_{p+2,p}\right)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\begin{aligned}
S_{p+3,p+1} &= (p+1)\left((p+2)! \times \frac{p+1}{2} + \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}\right) \\
&= (p+1)(p+2)!\frac{12p+12+3p^2+p}{24} \\
&= (p+1)(p+2)!\frac{3p^2+13p+12}{24} \\
&= (p+1)(p+2)!\frac{(3p+4)(p+3)}{24} \\
&= \frac{(p+1)(3p+4)(p+3)!}{24},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, S_{p+2,p} = \frac{p(3p+1)(p+2)!}{24}.}$

3. Grâce aux formules montrées précédemment, on peut construire la table des $S_{n,p}$ de proche en proche :

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	2			
$n=3$	1	6	6		
$n=4$	1	14	36	24	
$n=5$	1	30	150	240	120

En effet, les formules $S_{n,1} = 1$ et $S_{n,n} = n!$ permettent de remplir les termes extrêmes. Les formules $S_{p+1,p}$ et $S_{p+2,p}$ permettent ensuite de remplir toutes les cases de ce tableau, hormis celle pour $n = 5$ et $p = 2$.

On la calcule grâce à la formule $S_{5,2} = 2(S_{4,2} + S_{4,1}) = 2(14 + 1) = 30$.