Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°2
Samedi 18 novembre 2023 (3h00)

L'énoncé est constitué de deux exercices, d'un problème et comporte 3 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle : $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 1$.
2. Après avoir calculé $\sin(3x)$ pour tout réel x, résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x : $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation suivante d'inconnue x réelle non nulle

$$(E) : \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Montrer que pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a - b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$:
$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$
2. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, justifier que l'expression $\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ a un sens et la simplifier.
3. Résoudre l'équation (E).

Problème 1 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Le but de ce problème est de dénombrer les surjections entre intervalles d'entiers.
On note pour tout entier naturel n non nul l'intervalle d'entiers $I_n = [\![1, n]\!]$.
Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (n, p), on appelle $S_{n,p}$ le nombre de surjections de I_n vers I_p.

Partie I : Premiers exemples

1. Que vaut $S_{n,p}$ si $p > n$? Et si $p = n$?
2. Calculer $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $S_{p+1,p}$ pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, on considère deux entiers naturels non nuls p et n tels que $n \geqslant p$.

1. Justifier que $S_{n,p} > 0$.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} = 0$.
3. Soient k et l des entiers naturels tels que $k \leqslant l \leqslant p$.

   (a) Vérifier que $\binom{p}{l}\binom{l}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{l-k}$.

(b) En déduire que si $k < p$, alors $\displaystyle\sum_{l=k}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}\binom{l}{k} = 0$. Que peut-on dire si $k = p$?

4. Montrer que pour tout entier $k \in I_p$, le nombre d'applications de I_n vers I_p dont l'image contient k éléments vaut $\displaystyle\binom{p}{k}S_{n,k}$.

5. En déduire que $\displaystyle p^n = \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}S_{n,k}$.

6. En conclure que $\displaystyle S_{n,p} = (-1)^p\sum_{l=1}^{p}(-1)^l\binom{p}{l}l^n$.

Partie III : Calcul par récurrence des $S_{n,p}$

On suppose toujours que n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que si $0 < p \leqslant n-1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
   Indication : étant donné une surjection φ de I_n vers I_p, considérer sa restriction φ_1 à I_{n-1} et discuter selon le caractère surjectif ou non de φ_1.
2. Retrouver la valeur de $S_{p+1,p}$, puis montrer que $S_{p+2,p} = \dfrac{p(3p+1)(p+2)!}{24}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. En s'inspirant du triangle de Pascal, montrer qu'on peut construire une table des $S_{n,p}$.
   Construire cette table pour $0 < p \leqslant n \leqslant 5$.