

## Corrigé de la liste d'exercices n°8

## Fonctions réelles usuelles

### Exercice 1

La fonction  $f$  est définie pour les réels  $x$  tels que  $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, 1[$  donc  $\mathcal{D}_f = ]-1, 1[$  qui est symétrique par rapport à l'origine.  
Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $-x \in ]-1, 1[$  et

$$\begin{aligned} f(-x) &= (1 - (-x)^2) \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \\ &= (1 - x^2)(\ln(1-x) - \ln(1+x)) \\ &= -(1 - x^2)(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= -(1 - x^2) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

donc  $f$  est impaire.

### Exercice 2

- On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(-x)$ .  
Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(-x)$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = -f'(-x)$ .  
Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = g(x)$ , on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$  d'où pour tout réel  $x$ ,  $f'(-x) = -f'(x)$ , ce qui prouve que  $f'$  est impaire.
- On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-f(x) = f(-x)$ .  
Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(-x)$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = -f'(-x)$ .  
Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-f(x) = g(x)$ , on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-f'(x) = g'(x) = -f'(-x)$  d'où pour tout réel  $x$ ,  $f'(-x) = f'(x)$ , ce qui prouve que  $f'$  est paire.
- On suppose qu'il existe  $T > 0$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x+T) = f(x)$ , i.e.  $f$  est  $T$ -périodique. On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x+T)$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = f'(x+T)$ .  
Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = g(x)$ , on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = g'(x) = f'(x+T)$ , ce qui prouve que  $f'$  est  $T$ -périodique.

### Exercice 3

- Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = -x^2 + \pi \leq \pi = f(0)$  donc  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \pi$ . En revanche,  $f$  n'est pas minorée car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- Pour tout réel  $x$ ,  $1 \leq 2 - \sin(x) \leq 3$  donc  $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1 = f(\frac{\pi}{2})$  donc  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$  et  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ .

3. Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$  donc pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} > 0$  avec égalité pour  $x = -\frac{1}{2}$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{4}{3}$  avec égalité si  $x = \frac{1}{2}$  donc  $\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} = 0$  donc  $\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + x + 1} = 0$  (mais ce n'est pas un minimum, car la borne inférieure n'est pas atteinte).

4. Par définition de la partie entière, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$  donc en multipliant par  $x > 0$ , on obtient

$$1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1.$$

Par ailleurs, on a pour tout  $x > 0$ ,  $0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ .

On a  $f(1) = 1$  et  $f(2) = 0$  donc  $\min_{x > 0} f(x) = 0$  et  $\max_{x > 0} f(x) = 1$ .

## Exercice 4

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3 \cos(x) - 3x \sin(x) - \ln(5)5^x$ .
2.  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + k\frac{\pi}{2}\}$  et on a pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f'(x) = e^x + \frac{(\tan(x+1))^7 - 7x(1 + \tan^2(x+1))(\tan(x+1))^6}{(\tan(x+1))^{14}}.$$

3.  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f = ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[ \cup ]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi[$  et on a pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f'(x) = \frac{7x^6 \cos(x) - x^7 \sin(x)}{2\sqrt{x^7 \cos(x)}}.$$

4. On a  $3x^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{5}{3}}$  ou  $x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$  donc  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}[ \cup ]\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty[$  et pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 5}} \times \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 5}} = \frac{6x}{2(3x^2 - 5)}.$$

5. On a  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[ \\ 4 - x^2 & \text{si } x \in [-2, 2] \end{cases}$ . Puisque la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0,  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$  et pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ , on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[ \\ -2x & \text{si } x \in ]-2, 2[ \end{cases}$$

6. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, (2k+1)\pi[$  et pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ , on a

$$f'(x) = e^x \ln(\sin(x)) + e^x \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

7. On a  $\ln(\ln(x)) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$  donc  $f$  est dérivable sur  $]e, +\infty[$  et pour tout  $x > e$ , on a

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \times \frac{1}{x \ln(x)}.$$

8.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . On a pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  et pour tout  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$  donc

$$\forall x \in ]-1, 1[, f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

9. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Pour tout  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, (2k+1)\pi[$ ,  $f(x) = \sin(x)$  donc  $f'(x) = \cos(x)$ .

Pour tout  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$ ,  $f(x) = -\sin(x)$  donc  $f'(x) = -\cos(x)$ .

10. On a  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = 3$  donc  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ ,

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

## Exercice 5

1. Soit  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^x = e^{x \ln(x)} \end{array}$ . On peut en fait prolonger  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  par continuité car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ .  
La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on a pour tout  $x > 0$  :

$$f'(x) = \left( \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1)x^x.$$

On a  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[e^{-1}, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0, e^{-1}]$  et atteint son minimum en  $e^{-1}$  qui vaut  $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}} < 1$  car  $-e^{-1} < 0$ .

Notons que  $f(1) = 1$ .

Enfin,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Soit  $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin^2(x) \end{array}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq x + \sin^2(x) \leq x + 1$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , on en déduit par comparaison que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

De même, puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ , on en déduit par comparaison que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$g'(x) = 1 + 2 \sin(x) \cos(x) = 1 + \sin(2x) \geq 0$ , donc la fonction  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

3. Pour que  $h(x)$  soit défini, il faut que  $x + 1 \neq 0$  i.e.  $x \neq -1$  et  $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ , i.e.  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Finalement,  $h$  est définie sur  $\mathcal{D}_h = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Pour tout  $x \in \mathcal{D}_h$ , on a  $h(x) = x\sqrt{u(x)}$  où  $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$  donc  $h$  est dérivable en les points  $x$  pour lesquels  $u(x) > 0$ , i.e. pour tout  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$h'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On remarque que pour tout  $x > 1, h'(x) > 0$  donc  $h$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

Soit  $x < -1$ . On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{-x-1}} + \frac{x}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{-x-1}{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x-1}} + \frac{x\sqrt{-x-1}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(1-x)(x+1)^2 + x(-x-1)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \\ &= \frac{(x+1)((1-x)(x+1) - x)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \\ &= \frac{(x+1)(-x^2 - x + 1)}{(x+1)^2\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \end{aligned}$$

On a pour tout  $x < -1, (x+1) < 0, -x^2 - x + 1 > 0$  si  $x > \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et  $-x^2 - x - 1 < 0$  si  $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

Ainsi,  $h$  est strictement croissante sur  $\left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right]$  et strictement décroissante sur  $\left[ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1 \right[$ .

Notons que  $h(1) = 0$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$  donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x-1 = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^-$  donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ .

Par produit, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty.$$

## Exercice 6

1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et on a pour tout  $x \neq -1$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + x \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{(x+1)^2+2x}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+1)^2}\right). \end{aligned}$$

En effet, les racines de  $x^2 + 4x + 1$  sont  $-2 - \sqrt{3} < -1$  et  $-2 + \sqrt{3} > -1$ .

On a donc  $f'(x) > 0$  si  $x < -2 - \sqrt{3}$  et si  $x > -2 + \sqrt{3}$  et  $f'(x) < 0$  si  $-2 - \sqrt{3} < x < -1$  et si  $-1 < x < -2 + \sqrt{3}$ .

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty, -2 - \sqrt{3}]$ , strictement décroissante sur  $[-2 - \sqrt{3}, -1[$ , strictement décroissante sur  $] -1, -2 + \sqrt{3}]$  et strictement croissante sur  $[-2 + \sqrt{3}, +\infty[$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$  donc par composition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = e > 0$$

donc par produit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$ .

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$  donc par composition et produit

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty.$$

De même,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$  donc par composition et produit

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^-.$$

2. La fonction  $g$  est définie pour tout  $t$  tel que  $1+t > 0$ . Elle est donc définie sur  $] -1, +\infty[$  et y est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Pour tout  $t > -1$ , on a

$$g'(t) = \frac{2(1+t) - 2t}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{2 - (1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{(1+t)^2}.$$

Ainsi, si  $t < 1$ ,  $g'(t) > 0$  et si  $t > 1$ ,  $g'(t) < 0$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $] -1, 1[$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

On a  $\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{2t}{1+t} = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow -1^+} \ln(1+t) = -\infty$  donc on a une forme indéterminée de

la forme  $-\infty + \infty$ . Pour la lever, on factorise par  $\frac{1}{1+t}$  :

$$g(t) = \frac{1}{1+t} (2t - (1+t) \ln(1+t)).$$

Posons  $x = 1 + t$ . On a

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} (1+t) \ln(1+t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

donc  $\lim_{t \rightarrow -1^+} 2t - (1+t) \ln(1+t) = -2$  donc par produit

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+t} (2t - (1+t) \ln(1+t)) = -\infty.$$

Notons que  $g(1) = 1 - \ln(2) > 0$ .

Enfin, on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1+t} = 2$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty$  donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t) = -\infty.$$

## Exercice 7

1. Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - (x+1) = e^x - x - 1$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = e^x - 1.$$

On a  $f'(x) > 0$  si et seulement si  $x > 0$  et  $f'(x) < 0$  si et seulement si  $x < 0$ . Ainsi,  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $] -\infty, 0]$ . La fonction  $f$  admet donc un minimum en 0, ce qui assure que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0,$$

i.e. pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq x + 1$ .

2. Posons pour tout  $x > 0$ ,  $g(x) = \ln(x) - (x-1) = \ln(x) - x + 1$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On a  $g'(x) > 0$  si et seulement si  $x < 1$  et  $g'(x) < 0$  si et seulement si  $x > 1$ . Ainsi, la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, 1]$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ . La fonction  $g$  admet donc un maximum en 1, ce qui assure que pour tout  $x > 0$ ,

$$g(x) \leq g(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0,$$

i.e. pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(x) \leq x - 1$ .

## Exercice 8

On a montré dans le TD2 que pour tout  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , on a  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

Par croissance de la fonction logarithme népérien sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ceci implique que pour tout  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,

$$\ln(\sqrt{ab}) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

i.e. pour tout  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,

$$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

## Exercice 9

Posons pour tout  $x \geq 1$ ,  $f(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et on a pour tout  $x > 1$ ,

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1) + x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}.$$

On a  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$  et  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$  donc  $f$  est décroissante sur  $[1, \frac{4}{3}]$  et est croissante sur  $[\frac{4}{3}, +\infty[$ .

Ainsi,  $f$  admet un minimum en  $\frac{4}{3}$  qui vaut  $f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3}-2)\sqrt{\frac{4}{3}-1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

On en déduit que pour tout  $x \geq 1$ ,  $(x-2)\sqrt{x-1} \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

## Exercice 10

1. Soit  $x > 0$ . On a les équivalences suivantes :

$$x^{x^3} = (x^x)^3 \Leftrightarrow x^{x^3} = x^{3x} \Leftrightarrow e^{x^3 \ln(x)} = e^{3x \ln(x)}.$$

Par injectivité de la fonction exponentielle, ceci équivaut à

$$x^3 \ln(x) = 3x \ln(x) \Leftrightarrow x \ln(x)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x) = 0 \text{ ou } x^2 - 3 = 0.$$

Si  $x \ln(x) = 0$ , puisque  $x > 0$ , ceci implique que  $\ln(x) = 0$  d'où  $x = 1$ .

Si  $x^2 - 3 = 0$ , i.e.  $x^2 = 3$  et puisque  $x > 0$ , ceci implique que  $x = \sqrt{3}$ .

Ainsi, les deux solutions de cette équation sont  $\{1, \sqrt{3}\}$ .

2. Tout d'abord, notons que l'inéquation est bien définie si  $x+3 > 0$ , i.e.  $x > -3$  et  $x-1 > 0$ , i.e.  $x > 1$ . Donc l'inéquation est bien définie pour tout  $x > 1$ .

Soit  $x > 1$ . On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x+3) - \ln(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geq 1 = \ln(e)$$

donc par croissance de la fonction logarithme népérien, ceci équivaut à

$$\frac{x+3}{x-1} \geq e \Leftrightarrow x+3 \geq e(x-1) \text{ car } x-1 > 0,$$

ce qui équivaut à  $x(e-1) \leq 3+e$  d'où en divisant par  $e-1 > 0$ , on obtient  $x \leq \frac{3+e}{e-1} > 1$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de cette inéquation est  $\left]1, \frac{3+e}{e-1}\right]$ .

## Exercice 11

1. On a  $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)}$  donc  $f(x)$  est bien défini si  $x \neq 0$  et si  $1+2x > 0$ , i.e.  $x > -\frac{1}{2}$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est donc  $\mathcal{D}_f = ]-\frac{1}{2}, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathcal{D}_f$  et on a pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( -\frac{1}{x^2} \ln(1+2x) + \frac{1}{x} \times \frac{2}{1+2x} \right) e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)} \\ &= \frac{2x - (1+2x) \ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} (1+2x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

3. Pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $2x - (1+2x) \ln(1+2x)$ .

Posons pour tout  $x > -\frac{1}{2}$ ,  $g(x) = 2x - (1+2x) \ln(1+2x)$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$  et pour tout  $x > -\frac{1}{2}$ , on a

$$g'(x) = 2 - 2 \ln(1+2x) - (1+2x) \times \frac{2}{1+2x} = -2 \ln(1+2x).$$

Ainsi  $g'(x) > 0$  si et seulement si  $x \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$  et  $g'(x) < 0$  si et seulement si  $x > 0$ .

On en déduit que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$  et strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Il en découle que la fonction  $g$  admet un maximum en 0 donc pour tout  $x > -\frac{1}{2}$ ,  $g(x) \leq g(0) = 0$ .

Ceci assure que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f'(x) < 0$  donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$  et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{x} \ln(1+2x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1$ .

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2.$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^2$ .

Enfin, par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)} = 1.$$

## Exercice 12

On a pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln(x)} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)}$ .

Posons pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  comme composée de fonctions dérivables et on a pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \ln(1-x) - (1-x) \times \frac{1}{1-x} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$  et  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$  donc  $f$  est décroissante sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et croissante sur  $]\frac{1}{2}, 1[$ . Ainsi,  $f$  admet un minimum en  $\frac{1}{2}$  et pour tout



$x \in ]0, 1[$ , on en déduit

$$x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

En composant par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on obtient pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$x^x(1-x)^{1-x} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} \geq e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.$$

### Exercice 13

On a  $a^b = e^{b \ln(a)} = e^{\frac{1}{x} \ln(x^{\frac{1}{x}}) \times x^2} = e^{x \ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x} \times x})} = e^{\ln(x)} = x$ .

### Exercice 14

1.

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

2. Il y a deux cas :

- Si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est rationnel, on pose  $a = b = \sqrt{2}$  et dans ce cas, on a bien  $a$  et  $b$  irrationnels et  $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est rationnel.
- Si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  est irrationnel, on pose  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  et  $b = \sqrt{2}$  et dans ce cas, on a bien  $a$  et  $b$  irrationnels et  $a^b = 2$  est rationnel.

Dans tous les cas, on peut trouver deux nombres  $a$  et  $b$  irrationnels tels que  $a^b$  est rationnel.