
DEVOIR MAISON N°6
À RENDRE POUR LE VENDREDI 22 DÉCEMBRE 2023

Problème : Fonctions hyperboliques

On considère les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperboliques définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On considère également la fonction tangente hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle réelle.
2. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

(b) Déduire de la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

(c) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) = 2\operatorname{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x).$$

3. (a) Justifier que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées. En déduire que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites.
(b) Dresser le tableau de variation de la fonction ch et calculer ses limites.
4. (a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.
(b) En déduire que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque argsh définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
(c) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

5. (a) Montrer que pour tout $y \in [1, +\infty[$, l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}_+$.
(b) En déduire que ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, de bijection réciproque argch définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
(c) Montrer que la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x > 1$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

6. (a) Vérifier que la fonction th est impaire.
- (b) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En déduire que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites.
- (c) Montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$, l'équation $\operatorname{th}(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.
- (d) En déduire que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$, de bijection réciproque argth définie pour tout $x \in] -1, 1[$ par $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.
- (e) Montrer que la fonction argth est dérivable sur $] -1, 1[$ et que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$