Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3
Samedi 9 décembre 2023 (3h00)

Problème 1 : Méthode de Cardan

Partie I : Préliminaires

1. Cherchons les nombres complexes dont le cube vaut 1, i.e. résolvons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^3 - 1 = 0.$$
$z = 1$ est une solution évidente. On peut donc factoriser cette équation par $z - 1$ et on obtient
$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0.$$
Considérons l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. C'est un trinôme du second degré à cœfficients $a = b = c = 1$ réels.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$.
Les racines de ce trinôme du second degré sont donc
$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2.$$
Notons qu'on a également $j^2 = \overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Finalement, on a $z^3 - 1 = (z-1)(z-j)(z-j^2)$ donc
$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } z^3 = 1 \text{ est } \{1, j, j^2\}.}$$

2. On a $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \dfrac{z^3}{z_0^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^3 = 1$.
D'après la question précédente, ceci équivaut à $\dfrac{z}{z_0} \in \{1, j, j^2\}$.
Ainsi, $\dfrac{z}{z_0} = 1$ ou $\dfrac{z}{z_0} = j$ ou $\dfrac{z}{z_0} = j^2$ d'où $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = j^2 z_0$.
$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation } z^3 = z_0^3 \text{ est } \{z_0, jz_0, j^2 z_0\}.}$$

3. • On a $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$.
D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{\frac{i\pi}{9}}, je^{\frac{i\pi}{9}}, j^2 e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}.}$
• On a $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$.
D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = (e^{-\frac{i\pi}{9}})^3$ est $\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, je^{-\frac{i\pi}{9}}, j^2 e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}} e^{-\frac{i\pi}{9}}\} = \boxed{\{e^{-\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}.}$

Partie II : Résolution d'une équation de degré 3.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.
   D'après le théorème sur le signe d'un trinôme du second degré (ici, son cœfficient dominant est positif et ses racines sont 1 et 3), on en déduit que

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[\text{ et } f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1,3]$$

   donc f est croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $[3, +\infty[$ et décroissante sur $[1,3]$.
   De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   De même, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.
   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} = 1$ donc par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   En calculant $f(1) = 1$ et $f(3) = -3$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

   Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur les trois intervalles $]-\infty, 1]$, $[1,3]$ et $[3, +\infty[$, on en déduit qu'il existe $x_1 \in]-\infty, 1[$, $x_2 \in]1,3[$ et $x_3 \in]3, +\infty[$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet donc bien trois solutions réelles distinctes.}}$$

2. On a $x = z - h$. L'équation (E) devient alors

$$\begin{array}{rl} (E): & (z-h)^3 - 6(z-h)^2 + 9(z-h) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 - 3hz^2 + 3h^2z - h^3 - 6z^2 + 12hz - 6h^2 + 9z - 9h - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 + (-3h-6)z^2 + (3h^2 + 12h + 9)z - h^3 - 6h^2 - 9h - 3 = 0. \end{array}$$

   En posant $h = -2$, on en déduit que $z = x - 2$ vérifie l'équation

$$\boxed{(E') : z^3 - 3z - 1 = 0.}$$

3. (a) On a

$$\begin{array}{rcl} (u+v)^3 - 3(u+v) - 1 & = & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v - 1 \\ & = & U + V + 3u(uv) + 3v(uv) - 3u - 3v - 1 \\ & = & 1 + 3u + 3v - 3u - 3v - 1 \\ & = & 0 \end{array}$$

donc $\boxed{u+v \text{ est bien racine de } (E').}$

(b) On a $U+V=1$ et $UV=u^3v^3=(uv)^3=1$. D'après les relations cœfficients-racines, U et V sont racines du trinôme du second degré $X^2-(U+V)X+UV=0$, i.e.

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont les racines de } X^2-X+1=0.}$$

(c)
```
from math import *

def Racines(a,b,c):
    D=b**2-4*a*c
    if D>0:
        return((-b-sqrt(D))/(2*a),(-b+sqrt(D))/(2*a))
    elif D==0:
        return(-b/(2*a))
    elif D<0:
        return((-b-sqrt(-D)*1j)/(2*a),(-b+sqrt(-D)*1j)/(2*a))
```

(d) Le discriminant du trinôme X^2-X+1 vaut $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$ donc les racines U et V de ce trinôme sont

$$\boxed{U=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } V=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

On a donc $u^3=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $v^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
D'après les résultats de la Partie I, les nombres complexes u tels que $u^3=e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}$.
De même, les nombres complexes v tels que $v^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont $\{e^{-i\frac{\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$.
Or, on veut que $u+v=1$ et $uv=1$.
La condition $uv=1$ impose le fait que u et v doivent être conjugués.
• Si $\{u,v\}=\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\}$, on a bien $uv=1$ et d'après la formule d'Euler,

$$U+V=u^3+v^3=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

• Si $\{u,v\}=\{e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{-\frac{5i\pi}{9}}\}$, on a de même $uv=1$ et $U+V=u^3+v^3=1$.
• Enfin, si $\{u,v\}=\{e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{-\frac{7i\pi}{9}}\}$, on a également $uv=1$ et $U+V=u^3+v^3=1$.
Finalement, les paires $\{u,v\}$ possibles sont

$$\boxed{\{e^{i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{\pi}{9}}\}, \{e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{\frac{-5i\pi}{9}}\}, \{e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{\frac{-7i\pi}{9}}\}.}$$

(e) D'après la question 3.(a) de la Partie II, si $\{u,v\}$ vérifie $(*)$, alors $u+v$ est racine de (E').
D'après la question précédente, on obtient trois racines différentes pour (E') :

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{9}}+e^{-i\frac{\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\ ;\ z_2=e^{\frac{5i\pi}{9}}+e^{-\frac{5i\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\ ;\ z_3=e^{\frac{7i\pi}{9}}+e^{-\frac{7i\pi}{9}}=2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

Elles sont bien différentes car $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}$ et $\frac{7\pi}{9}$ appartiennent à $[0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$.

Or, une équation de degré 3 admet au plus trois racines complexes.

$$\boxed{\text{Les racines de } (E') \text{ sont donc } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right); 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right\}.}$$

4. On a vu en deuxième question de la Partie II que x est racine de (E) si et seulement si $z = x - 2$ est racine de (E'). Ainsi, z est racine de (E') si et seulement si $x = z + 2$ est racine de (E).

$$\boxed{\text{Les racines de } (E) \text{ sont donc } \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 2; 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + 2; 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + 2\right\}.}$$

Problème 2 : Maximisation d'aire

Partie I

1. La fonction f est dérivable sur $]0;1]$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0;1]$ et on a,

$$\begin{aligned} \forall x \in]0;1], f'(x) &= (1-\ln(x))^2 - 2x \times \frac{1}{x}(1-\ln(x)) \\ &= (\ln(x)-1)(\ln(x)-1+2) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in]0,1], f'(x) = (\ln(x)-1)(\ln(x)+1).}$

2. Par croissance de la fonction ln sur $]0;1]$, pour tout $x \in]0;1], \ln(x) \leq \ln(1)$, donc pour tout $x \in]0;1], \ln(x) \leq 0$.
Ainsi, pour tout $x \in]0;1], \ln(x) - 1 \leq -1 < 0$. D'autre part, en utilisant de nouveau la croissance de la fonction ln sur $]0;1]$, on a $\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$.
Il s'ensuit que $(\ln(x)+1)(\ln(x)-1) \geqslant 0$ pour tout $x \in]0;e^{-1}]$ et $(\ln(x)+1)(\ln(x)-1) \leqslant 0$ pour tout $x \in [e^{-1};1]$.
Par conséquent, $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]0;e^{-1}]$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [e^{-1};1]$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $]0;e^{-1}]$ et décroissante sur $[e^{-1};1]$.
Par ailleurs, on a $f(1) = 1(1-\ln(1))^2 = 1$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1 - 2\ln(x) + \ln(x)^2) = x - 2x\ln(x) + x\ln(x)^2.$$

On sait que $\lim_{x\to 0^+} x - 2x\ln(x) = 0$.
D'autre part, on a

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)^2 = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln(x))^2 = \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}^2))^2 = \lim_{x\to 0^+} (2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2 = \lim_{x\to 0^+} 4(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2.$$

Posons $X = \sqrt{x}$. On a $X \to 0^+ \Leftrightarrow x \to 0^+$ donc

$$\lim_{x\to 0^+} 4(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2 = 4\lim_{X\to 0^+} (X\ln(X))^2 = 0$$

car $\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$.
Ainsi, on a $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)^2 = 0$ d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	1

La fonction f admet donc un maximum en e^{-1} qui vaut

$$f(e^{-1}) = e^{-1}(1 - \ln(e^{-1}))^2 = e^{-1}(1 - (-1))^2 = 4e^{-1}.$$

Partie II

1. Rappelons que pour tout $x \in]0; 1], g'(x) = \frac{1}{x}$.
   Soit $a \in]0, 1]$.
   L'équation de la tangente d_a est alors

   $$y = \ln'(a)(x - a) + \ln(a) = \frac{x - a}{a} + \ln(a) = \frac{x}{a} + \ln(a) - 1.$$

   On a $\dfrac{x}{a} + \ln(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = 1 - \ln(a) \Leftrightarrow x = a(1 - \ln(a))$ donc le point $\boxed{N_a(a(1 - \ln(a)), 0)}$ est le point d'intersection de d_a avec l'axe des abscisses.

   Enfin, pour $x = 0$, on a $\dfrac{x}{a} + \ln(a) - 1 = \ln(a) - 1$ donc le point $\boxed{P_a(0, \ln(a) - 1)}$ est le point d'intersection de d_a avec l'axe des ordonnées.
2. Le triangle ON_aP_a est rectangle en O donc son aire vaut

   $$\frac{ON_a \times OP_a}{2} = \frac{|a(1 - \ln(a))| \times |\ln(a) - 1|}{2} = \frac{|a| \times |1 - \ln(a)|^2}{2}.$$

   Or, $a \in]0, 1]$ donc $a > 0$ et puisque $a < e, \ln(a) < \ln(e) = 1$ donc $1 - \ln(a) > 0$ d'où $|1 - \ln(a)| = 1 - \ln(a)$.

   Finalement, on trouve bien que $\boxed{\text{l'aire du triangle } ON_aP_a \text{ vaut } A(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln(a))^2.}$
3. On remarque que $A(a) = \frac{1}{2}f(a)$. Ainsi, $A(a)$ est maximale pour la valeur de a qui maximise $f(a)$. Or d'après, la question 2 de la partie I, $f(a)$ est maximal pour $a = e^{-1}$. Il en est donc de même pour A et l'aire maximale obtenue est

   $$\boxed{A(e^{-1}) = \frac{1}{2}f(e^{-1}) = 2e^{-1}.}$$

Exercice 1 : Un lapin pas si crétin

1. Calculons les distances en mètres et les temps en heures.
   Dans le triangle rectangle ABD, on trouve $\cos(\theta) = \dfrac{AB}{AD}$ d'où $AD = \dfrac{AB}{\cos(\theta)}$, i.e.

   $$\boxed{AD = \frac{4}{\cos(\theta)}.}$$

De même, $\tan(\theta) = \dfrac{BD}{AB}$ d'où $BD = \tan(\theta) \times AB$, i.e. $BD = 4\tan(\theta)$.

Or, puisque les points B, C et D sont alignés, $CD = CB + BD$ d'où $\boxed{CD = 7 + 4\tan(\theta).}$

Le lapin court à une vitesse de 30 km/h, i.e. 30000 m/h donc $\boxed{t_1 = \dfrac{AD}{30000} = \dfrac{4}{30000\cos(\theta)}.}$

Le camion roule à une vitesse de 60 km/h donc $\boxed{t_2 = \dfrac{CD}{60000} = \dfrac{7}{60000} + \dfrac{2\tan(\theta)}{30000}.}$

2. Le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \frac{4}{30000\cos(\theta)} < \frac{7}{60000} + \frac{2\tan(\theta)}{30000}$$

ce qui équivaut en multipliqant par 30000 à

$$\frac{4}{\cos(\theta)} < \frac{7}{2} + 2\tan(\theta),$$

i.e. $\dfrac{7}{2} + 2\tan(\theta) - \dfrac{4}{\cos(\theta)} > 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si } f(\theta) > 0.}$

3. La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et on a pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - \frac{4\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{2}{\cos^2(\theta)}(1 - 2\sin(\theta)).$$

On observe que $f'(\theta)$ est du signe de $1 - 2\sin(\theta)$ donc

$$f'(\theta) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(\theta) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$$

De même,

$$f'(\theta) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(\theta) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ donc f admet un maximum en $\frac{\pi}{6}$ et celui-ci vaut

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{7}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{21 - 12\sqrt{3}}{6}.$$

Or $\left(\dfrac{21}{12}\right)^2 = \dfrac{441}{144} > 3$ donc par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\dfrac{21}{12} > \sqrt{3}$ d'où $21 - 12\sqrt{3} > 0$, ce qui implique que $f(\frac{\pi}{6}) > 0$.

$\boxed{\text{Finalement, le lapin doit prendre un angle de } \dfrac{\pi}{6} \text{ afin d'arriver avec le plus d'avance possible.}}$

Exercice 2 : Une transformation du plan

1. (a) Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On note $z = re^{i\theta}$. Alors

$$z' = -\frac{1}{z} = e^{i\pi}\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\pi - i\theta}$$

d'où $\boxed{z' = \dfrac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}.}$

(b) Soit M, distinct de 0, appartenant au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1. Alors M est d'affixe $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = |z|$ et θ un réel. D'après la condition sur M, on sait que $r \in]0;1[$.
D'après la question précédente, $z' = \frac{1}{r}e^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$. Ainsi, $|z'| = \frac{1}{r}$. Or, $r \in]0;1[$ donc $\frac{1}{r} \in]1;+\infty[$.
Autrement dit, $|z'| > 1$, donc $\boxed{M' \text{ est bien à l'extérieur du disque de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$

2. (a) Le point K a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$. Une équation cartésienne du cercle Γ de centre K et de rayon $\frac{1}{2}$ est donc

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

ce qui donne en développant

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4},$$

puis finalement

$$\boxed{x^2 + x + y^2 = 0.}$$

(b) Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y non tous les deux nuls. Alors

$$z' = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x+iy} = \frac{-x+iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}$$

d'où $\boxed{z' = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}.}$

(c) Soit M un point du cercle Γ distinct de O. Notons $z = x + iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Alors M' a pour affixe $z' = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$.
Or, M appartient à Γ donc vérifie $x^2 + x + y^2 = 0$. Autrement dit, $x^2 + y^2 = -x$, ce qui assure la non nullité de x.
Ainsi, $z' = -\frac{x}{-x} + i\frac{y}{-x} = 1 - i\frac{y}{x}$.
On en déduit que $\mathrm{Re}(z') = 1$, ce qui implique que $\boxed{M' \text{ appartient à la droite d'équation } x = 1.}$