Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°3

Samedi 9 décembre 2023 (3h00)

L'énoncé est constitué de deux problèmes, deux exercices et comporte 4 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Méthode de Cardan

Le but de ce problème est de trouver une méthode pour obtenir les racines (complexes) d'une équation de degré 3. On admettra qu'une équation de degré 3 admet au plus trois racines complexes.

Partie I : Préliminaires

On rappelle qu'on note j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 1$ sur $\mathbb{C}$ est $\{1, j, j^2\}$.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = z_0^3$ sur $\mathbb{C}$ est $\{z_0, jz_0, j^2 z_0\}$.
3. Donner l'ensemble des solutions des équations $z^3 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z^3 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ sur $\mathbb{C}$.

Partie II : Résolution d'une équation de degré 3.

On considère l'équation de degré 3 suivante :

$$(E) : x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ et en déduire que l'équation (E) admet trois solutions réelles distinctes.
2. Soit x une solution de (E), et h un nombre complexe fixé. On pose $z = x + h$.
   Déterminer une équation vérifiée par z. Montrer que pour une valeur de h bien choisie, l'équation obtenue ne comporte pas de terme de degré 2.
3. On considère désormais l'équation $(E') : z^3 - 3z - 1 = 0$.
   Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U + V & = & 1 \\ uv & = & 1. \end{array} \right. \quad (*)$$

   (a) Montrer que $u + v$ est racine de l'équation (E').
   (b) A l'aide des valeurs de $U + V$ et de UV, déterminer un trinôme du second degré à cœfficients réels dont U et V sont les racines.
   (c) Ecrire une fonction Python `Racines (a,b,c)` donnant les racines du trinôme du second degré à cœfficients réels $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction du signe de son discriminant (on rappelle que le nombre complexe i se note `1j` et que plus généralement, tout nombre complexe $x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se note `x+y*1j`).
   (d) Calculer U et V, les écrire sous forme exponentielle, puis en déduire toutes les paires $\{u, v\}$ respectant $(*)$. *On pourra utiliser les résultats de la Partie I.*
   (e) Donner les trois racines de (E').
4. Résoudre (E).

Problème 2 : Maximisation d'aire

Dans tout le problème, on munit le plan $\mathbb{R}^2$ du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le point du plan de coordonnées $(0, 0)$, $\vec{i}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $f(x) = x(1-\ln(x))^2$.

1. Vérifier que f est dérivable sur l'intervalle $]0,1]$ et montrer que pour tout $x \in]0,1]$,
$$f'(x) = (\ln(x)+1)(\ln(x)-1).$$
2. Etudier les variations de la fonction f, calculer sa limite en 0 puis dresser son tableau de variations. En déduire que f admet un maximum sur $]0,1]$ que l'on précisera.
(Indication : pour calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)^2$, il pourra être utile d'écrire $x\ln(x)^2 = 4(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2$.

Partie II

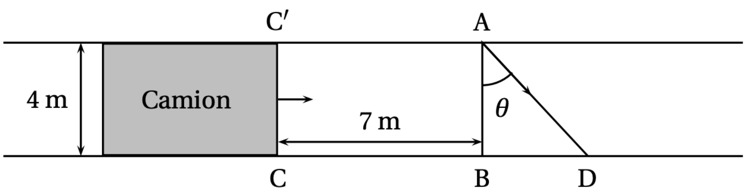
On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $g(x) = \ln(x)$. Soit a un réel de l'intervalle $]0,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a.

1. Vérifier que pour tout $a \in]0,1]$, la droite d_a coupe l'axe des abscisses en un point N_a et l'axe des ordonnées en un point P_a. On précisera les coordonnées de ces deux points.
2. Montrer que pour tout $a \in]0,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a vaut $A(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln(a))^2$ en unités d'aire.
3. Déterminer pour quel réel a l'aire $A(a)$ est maximale et donner la valeur de cette aire.

Exercice 1 : Un lapin pas si crétin

Rien ne sert de courir ; il faut partir à point.

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à 30 km/h !
L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\widehat{BAD}$, avec $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan(\theta) - \dfrac{4}{\cos(\theta)}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$. Quel angle θ peut-on lui conseiller de prendre afin d'arriver avec le plus d'avance possible sur le camion ?

Exercice 2 : Une transformation du plan

On munit le plan complexe du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où O est le point du plan de coordonnées $(0,0)$, $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On appelle f la fonction qui, à tout point M du plan disctinct de O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{z}$.

1. (a) Soit $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel.
   Donner la forme exponentielle de z'.
   (b) En déduire que si un point M distinct de O appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque.
2. Soit Γ le cercle de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
   (a) Montrer qu'une équation cartésienne du cerlce Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
   (b) Soit $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
   (c) Soit M un point du cercle Γ, distinct de O. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.