
DEVOIR MAISON N°7
A RENDRE POUR LE MERCREDI 10 JANVIER 2024

Exercice 1 : Modèle de Malthus

Pour modéliser l'évolution dans le temps de l'effectif $N(t)$ d'une population donnée, on peut utiliser différents modèles, plus ou moins raffinés, l'enjeu étant de trouver un modèle qui soit à la fois suffisamment simple pour être utilisable, et suffisamment précis pour s'approcher des observations.

1. Le modèle le plus simple est celui de Malthus : en notant r le taux d'accroissement de la population (on suppose qu'il est constant), l'effectif vérifie l'équation différentielle

$$N'(t) = rN(t).$$

Rappelez l'expression de la solution générique, puis étudiez ses variations et sa limite en $t \rightarrow +\infty$, selon que le taux d'accroissement est positif ou négatif. Quelle conclusion concrète peut-on en tirer ?

2. On suppose maintenant que le taux d'accroissement varie en fonction du temps :

$$N'(t) = r(t)N(t)$$

Calculer la solution générale dans le cas où $r(t) = \cos t$. La population risque-t-elle alors l'extinction ?

3. Par rapport au modèle de Malthus, on suppose que $r < 0$, puis on fait l'hypothèse supplémentaire d'un flux constant d'immigration m , ce qui donne le modèle

$$N'(t) = rN(t) + m$$

Exhiber une solution constante, puis, à l'aide d'un théorème du cours, en déduire la solution générale de l'équation, ses variations et son comportement asymptotique lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E) : x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0,$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Montrer que si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$(E') : g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) = 0.$$

2. Réciproquement, soit g une solution de (E') sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $y = g \circ \ln$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (E') dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire dans chacun des cas les solutions à valeurs réelles de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.