
CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°6

Problème : Fonctions hyperboliques

1. On vérifie d'abord que ch est paire et sh impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x)$$

donc ch est paire.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\text{sh}(x)$$

donc sh est impaire.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$. On a donc bien montré que ch et sh sont les parties paire et impaire de la fonction exponentielle réelle.

2. (a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}) \\ &= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\ &= \text{ch}(x+y) \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$.

De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\ &= \text{sh}(x+y) \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)$.

On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{ch}(x-y) = \text{ch}(x+(-y)) = \text{ch}(x)\text{ch}(-y) + \text{sh}(x)\text{sh}(-y)$$

d'où, par parité de ch et imparité de sh ,

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ch}(x - y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y).}$$

De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\text{sh}(x - y) = \text{sh}(x + (-y)) = \text{sh}(x)\text{ch}(-y) + \text{ch}(x)\text{sh}(-y)$$

donc par les mêmes arguments,

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{sh}(x - y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) - \text{ch}(x)\text{sh}(y).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'après la question précédente

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \text{ch}(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{sh}(x) = \text{ch}(x - x) = \text{ch}(0) = 1$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.}$$

(c) D'après la question 2.(a), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(2x) = \text{ch}(x + x) = \text{ch}(x)\text{ch}(x) + \text{sh}(x)\text{sh}(x)$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x).}$$

En utilisant la relation prouvée à la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x) - 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{ch}^2(x) - 1$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(2x) = 2\text{ch}^2(x) - 1.}$$

De même, en utilisant la même relation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) = \text{sh}^2(x) + 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(2x) = \text{sh}^2(x) + 1 + \text{sh}^2(x)$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(2x) = 2\text{sh}^2(x) + 1.}$$

Enfin, d'après la question 2.(a), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sh}(2x) = \text{sh}(x + x) = \text{sh}(x)\text{ch}(x) + \text{ch}(x)\text{sh}(x)$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x).}$$

3. (a) Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = \text{sh}(x).}$$

$$\text{De même, pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ d'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = \text{ch}(x).}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc $\text{sh}'(x) > 0$, ce qui prouve que

$\boxed{\text{la fonction sh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

Enfin, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.}$$

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty.$$

- (b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$. D'après la question précédente, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$ donc pour tout $x \leq 0$, $\text{sh}(x) \leq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $\text{sh}(x) \geq 0$.

Ainsi, pour tout $x \leq 0$, $\text{ch}'(x) \leq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $\text{ch}'(x) \geq 0$.

De la même manière que pour les limites de sh, on trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$.

Enfin $\text{ch}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$.

On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction ch :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

4. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\text{sh}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = ye^x \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Posons $X = e^x > 0$. On a alors $\text{sh}(x) = y \Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$$

donc

$$X = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{ou} \quad X = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

On constate que $y - \sqrt{y^2 + 1} \leq 0$ car $\sqrt{y^2 + 1} \geq \sqrt{y^2} = |y| \geq y$ et

$$y + \sqrt{y^2 + 1} > y + \sqrt{y^2} = y + |y| \geq 0$$

car $|y| \geq -y$ donc $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$.

Puisque $X > 0$, on en déduit que $X = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$.

En appliquant le logarithme népérien, on trouve que

$$\text{l'unique solution de } \text{sh}(x) = y \text{ est } x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

- (b) D'après la question précédente, tout réel y admet un unique antécédent par la fonction sh et cet antécédent est $\text{sh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Ainsi, la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $\text{argsh} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- (c) D'après l'expression trouvée en question précédente, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En notant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}},$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}.$

5. (a) Soit $y \in [1, +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = ye^x \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 2ye^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Posons $X = e^x > 0$. On a alors $\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow X^2 - 2yX + 1 = 0$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \geq 0$$

car $y \geq 1$ donc $y^2 \geq 1$.

- Si $y = 1$, $\Delta = 0$ donc le trinôme admet pour unique solution $X = e^x = 1$ d'où $x = 0 = \ln(1 + \sqrt{1^2 - 1})$.
- Si $y > 1$, $\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes. Ainsi,

$$X = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{ou} \quad X = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Notons qu'on a bien $y + \sqrt{y^2 - 1} > y - \sqrt{y^2 - 1} > y - \sqrt{y^2} = y - y = 0$ car $y > 1$ donc $y > 0$.

Ainsi, les deux valeurs sont strictement positives et sont donc possibles pour $X = e^x$. En appliquant le logarithme népérien, on trouve

$$x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{ou} \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

On a

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{(y - \sqrt{y^2 - 1})(y + \sqrt{y^2 - 1})}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < \frac{1}{y} < 1$$

car $y > 1$ donc $\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) < 0$.

D'autre part, $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) > \ln(y) > \ln(1) = 0$ donc une seule des deux solutions possibles est positive.

On en déduit que si $y > 1$, l'unique solution positive de $\operatorname{ch}(x) = y$ est

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \geq 1, \text{ l'équation } \operatorname{ch}(x) = y \text{ admet une unique solution } x \in \mathbb{R}_+}.$

- (b) D'après le tableau de variation de ch , on voit que $\operatorname{ch}(\mathbb{R}_+) \subset [1, +\infty[$. D'après la question précédente, tout réel $y \in [1, +\infty[$ admet un unique antécédent par la fonction ch dans $\mathbb{R}_+$ et cet antécédent est $\operatorname{ch}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Finalement, la fonction ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et

$$\boxed{\text{sa bijection réciproque est } \operatorname{argch} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).}$$

- (c) On a bien pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$. D'autre part, on sait que la fonction racine n'est pas dérivable en 0 donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable en les réels x tels que $x^2 - 1 > 0$, i.e. sur $]1, +\infty[$.

Ainsi, la fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$.

En notant pour tout $x \in]1, +\infty[$, $u(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, on a pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}},$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in]1, +\infty[, \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.}$

6. (a) En utilisant l'imparité de sh et la parité de ch , on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x)$$

donc $\boxed{\text{la fonction th est impaire.}}$

- (b) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1$) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x) \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$$

en utilisant le résultat de la question 2.(b).

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) > 0$ donc $\boxed{\text{la fonction th est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} + 1 = 1$ donc par quotient, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = -1.}$$

Par imparité de th , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(-x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x)$$

d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1.}$

- (c) Soit $y \in]-1, 1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\operatorname{th}(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = 1 + y$$

d'où $e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$. Puisque $y > -1$, $1 + y > 0$, et puisque $y < 1$, $1 - y > 0$ donc on a

bien $\frac{1 + y}{1 - y} > 0$. En appliquant le logarithme népérien, on obtient $2x = \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right)$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } y \in]-1, 1[, \text{l'unique solution } x \in \mathbb{R} \text{ à l'équation } \operatorname{th}(x) = y \text{ est } x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right).}$$

- (d) Puisque la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$, alors $\text{th}(\mathbb{R}) \subset]-1, 1[$. D'après la question précédente, tout réel $y \in]-1, 1[$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction th , et cet antécédent est $\text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$. Ainsi, la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $] - 1, 1[$ et

$$\boxed{\text{sa bijection réciproque est } \text{argth} : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) .}$$

- (e) La fonction argth est dérivable sur $] - 1, 1[$ comme composée de fonctions dérivables sur $] - 1, 1[$. En notant pour tout $x \in] - 1, 1[$, $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$, on a pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)^2} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } x \in] - 1, 1[, \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} .}$