

## Corrigé de la liste d'exercices n°9

## Equations différentielles linéaires

### Exercice 1

1.  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$

L'unique solution telle que  $y(0) = 1$  est  $\exp$ .

2. On considère l'équation homogène  $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + 5y(t) = 0.$

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-5t}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est la fonction constante égale à  $\frac{2}{5}$  donc  $\mathcal{S}_E = \{y : t \mapsto \lambda e^{-5t} + \frac{2}{5}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$

On a alors  $y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{5}.$

L'unique solution telle que  $y(0) = 1$  est donc  $y : t \mapsto \frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{5}.$

3. L'équation est équivalente à  $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 7.$

On considère l'équation homogène  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 0.$

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$

Une solution particulière de  $(H)$  est la fonction constante égale à  $-\frac{7}{3}$  donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{3x} - \frac{7}{3}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a alors  $y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{3}$  donc l'unique solution telle que  $y(0) = 1$  est  $y : x \mapsto \frac{10}{3}e^{3x} - \frac{7}{3}.$

### Exercice 2

1. •  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = 0.$

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = \lambda(x)e^{2x}$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}.$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) &= (x-1)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{2x} + 2\lambda(x)e^{2x} - 2\lambda(x)e^{2x} = (x-1)e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x-1 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{x^2}{2} - x + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. •  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0.$

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = \lambda(x)e^x$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) &= \cos(2x)e^x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = \cos(2x)e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^x + \frac{\sin(2x)}{2}e^x\end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^x + \frac{\sin(2x)}{2}e^x, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. • (H) :  $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = 0$ .

$$\text{On a } \mathcal{S}_H = \{ y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

• On remarque facilement que la fonction  $y : x \mapsto x$  est solution particulière de (E) donc  $\mathcal{S}_E = \{ y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + x, \lambda \in \mathbb{R} \}$ .

4. On a (E) :  $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

$$\bullet \text{ Soit (H) : } \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = 0.$$

$$\text{On a } \mathcal{S}_H = \{ y : x \mapsto \lambda e^{\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ y : x \mapsto \lambda(1+x^2), \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

• On remarque facilement que la fonction constante égale à  $-\frac{1}{2}$  est solution particulière de (E) donc  $\mathcal{S}_E = \{ y : x \mapsto \lambda(1+x^2) - \frac{1}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \}$ .

5. On a (E) :  $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = \frac{x + e^{2x}}{3}$ .

$$\bullet \text{ Soit (H) : } \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) = 0.$$

$$\text{Alors } \mathcal{S}_H = \{ y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x}, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = \lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x}$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \frac{2}{3}y(x) &= \frac{x + e^{2x}}{3} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3}\lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3}\lambda(x)e^{-\frac{2}{3}x} = \frac{x + e^{2x}}{3} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{1}{3}(xe^{\frac{2}{3}x} + e^{\frac{8}{3}x}).\end{aligned}$$

Cherchons une primitive de  $x \mapsto xe^{\frac{2}{3}x}$  en réalisant une intégration par parties.

On a

$$\int_0^x te^{\frac{2}{3}t} dt = \left[ \frac{3}{2}te^{\frac{2}{3}t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}t} dt = \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \left[ \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}t} \right]_0^x = \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{9}{4}.$$

On peut donc choisir comme primitive de  $x \mapsto \frac{1}{3}(xe^{\frac{2}{3}x} + e^{\frac{8}{3}x})$  la fonction

$$\lambda : x \mapsto \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{9}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{3}{8}e^{\frac{8}{3}x} \right) = \frac{1}{2}xe^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{1}{8}e^{\frac{8}{3}x}$$

donc une solution particulière est

$$y(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2x}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. • Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme  $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \ln(1+e^x) + c \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x} + ce^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

7. On remarque que si pour tout réel  $x$ ,  $3xy'(x) - 4y(x) = x$ , alors  $y(0) = 0$ .

• Commençons par résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

L'équation homogène est  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = 0$  qui admet comme ensemble de solutions  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\frac{4}{3}\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

On remarque que  $x \mapsto -x$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda x^{\frac{4}{3}} - x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

• Résolvons maintenant  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

L'équation homogène est  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) - \frac{4}{3x}y(x) = 0$  qui admet comme ensemble de solutions  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \mu e^{\frac{4}{3}\ln(-x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \mu x^{\frac{4}{3}}, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

On remarque que  $x \mapsto -x$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \mu x^{\frac{4}{3}} - x, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

Finalement,  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, y(x) = \lambda x^{\frac{4}{3}} - x \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu x^{\frac{4}{3}} - x \end{array} \right\}.$$

8. • Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\cos(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

• On remarque que la fonction constante égale à 2 est une solution particulière de  $(E)$  donc  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{\cos(x)} + 2, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

9. On a  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-e^x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

10. • Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de  $(E)$  sous la forme  $y(x) = \lambda(x)e^x$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = x^2(e^x + e^{-x}) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^x + \lambda(x)e^x - \lambda(x)e^x = x^2(e^x + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x^2 + x^2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Cherchons une primitive de  $x \mapsto x^2 e^{-2x}$  sous la forme  $z(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ .

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = x^2 e^{-2x} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c)e^{-2x} = x^2 e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c = x^2 \end{aligned}$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2a - 2b &= 0 \\ b - 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2} \\ c &= -\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc finalement, on peut poser pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda(x) = \frac{x^3}{3} + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-2x}$  d'où

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \frac{x^3}{3}e^x + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}$ .

Finalement,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^x + \frac{x^3}{3}e^x + (-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

11. • Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{-2x}\}$ .

• Cherchons une solution particulière de  $(E)$  sous la forme  $y(x) = ax^2 + bx + c$ . On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 - 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} 2a &= 1 \\ 2a + 2b &= -2 \\ b + 2c &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{3}{2} \\ c &= \frac{9}{4} \end{cases}$$

Finalement,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\}$ .

12. • Soit  $(H) : \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , y'(x) + \tan(x)y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{\ln(|\cos(x)|)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda \cos(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

• Méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de  $(E)$  sous la forme  $y(x) = \lambda(x) \cos(x)$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , y'(x) + \tan(x)y(x) &= \sin(2x) + \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \lambda'(x) \cos(x) - \lambda(x) \sin(x) + \tan(x) \cos(x) \lambda(x) &= \sin(2x) + \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \lambda'(x) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} + 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \lambda'(x) = 2 \sin(x) + 1 \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \lambda(x) &= -2 \cos(x) + x + c \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , y(x) &= c \cos(x) + x \cos(x) - 2 \cos^2(x). \end{aligned}$$

Finalement,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda \cos(x) + x \cos(x) - 2 \cos^2(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

### Exercice 3

Procédons par analyse-synthèse.

• **Analyse** : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -f(x) + f(0) + f(1)$  donc  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) = -f'(x)$  d'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) + f'(x) = 0$ .

Ainsi, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \lambda e^{-x}$  donc en primitivant, on obtient l'existence de deux réels  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \mu - \lambda e^{-x}$ .

Ainsi,  $f(0) = \mu - \lambda$  et  $f(1) = \mu - \lambda e^{-1}$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) \Leftrightarrow \mu = 2\mu - \lambda(1 + e^{-1}) \Leftrightarrow \mu = \lambda(1 + e^{-1})$$

d'où pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x})$ .

• **Synthèse** : Supposons qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x})$ .

On a alors pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \lambda e^{-x}$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) + f'(x) = \lambda(1 + e^{-1})$ .

Or,  $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1} - 1 + 1 + e^{-1} - e^{-1}) = \lambda(1 + e^{-1})$ .

On a donc bien pour tout réel  $x$ ,  $f(x) + f'(x) = f(0) + f(1)$ .

Finalement, l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$  sont les fonctions  $\{f : x \mapsto \lambda(1 + e^{-1} - e^{-x}), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

### Exercice 4

1. • Résolvons  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .

On considère alors l'équation  $(E') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = x^2$ .

Soit  $(H') : \forall x > 0, y'(x) + (1 - \frac{2}{x})y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_{H'} = \{y : x \mapsto \lambda e^{-x+2\ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

On remarque que  $x \mapsto x^2$  est une solution particulière de  $(E')$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc

$$\mathcal{S}_{E'} = \{y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x} + x^2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Résolvons  $(E)$  sur  $] -\infty, 0[$ .

On considère alors l'équation  $(E'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = -x^2$ .

Soit  $(H'') : \forall x < 0, y'(x) + (\frac{2}{x} - 1)y(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_{H''} = \{y : x \mapsto \mu e^{x-2\ln(x)}, \mu \in \mathbb{R}\} = \{y : x \mapsto \mu \frac{e^x}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

On cherche une solution particulière de  $(E'')$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  sous la forme  $y(x) = \lambda(x) \frac{e^x}{x^2}$  où  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \forall x < 0, y'(x) + \left(\frac{2}{x} - 1\right)y(x) &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) \frac{e^x}{x^2} + \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} - 2\lambda(x) \frac{e^x}{x^3} + 2\lambda(x) \frac{e^x}{x^3} - \lambda(x) \frac{e^x}{x^2} &= -x^2 \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, \lambda'(x) &= -x^4 e^{-x}. \end{aligned}$$

On cherche une primitive  $\lambda$  sous la forme  $\lambda(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + t)e^{-x}$  où  $(a, b, c, d, t) \in \mathbb{R}^5$ .

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} \forall x < 0, \lambda'(x) &= -x^4 e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - t)e^{-x} &= -x^4 e^{-x} \\ \Leftrightarrow \forall x < 0, -ax^4 + (4a - b)x^3 + (3b - c)x^2 + (2c - d)x + d - t &= -x^4 \end{aligned}$$

d'où par identification

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 4a - b = 0 \\ 3b - c = 0 \\ 2c - d = 0 \\ d - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 12 \\ d = 24 \\ t = 24 \end{cases}$$

donc on peut considérer  $\forall x < 0, \lambda(x) = (x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24)e^{-x}$ .

Ainsi, pour tout  $x < 0, y(x) = x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}$ .

Finalement,  $\mathcal{S}_{E''} = \{y : x \mapsto \mu \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2}, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

2. Soit  $y$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda x^2 e^{-x} + x^2 \\ y(0) = 0 \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \mu \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \end{cases}$$

Puisque  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , a fortiori  $y$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc en 0. On doit donc avoir  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y(0) = 0$ .

On a bien  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ .

Cherchons  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$ .

Faisons un développement limité de  $y$  en 0.

On a

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \\ &= \frac{\mu + 24}{x^2} + \frac{\mu + 24}{x} + \frac{\mu + 24}{2} + o(1) + 4x + x^2 \\ &= \frac{\mu + 24}{x^2} + \frac{\mu + 24}{x} + \frac{\mu + 24}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$  si et seulement si  $\mu = -24$ .

Les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont donc les fonctions  $y$  telles que

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, y(x) = \lambda x^2 e^{-x} + x^2 \\ \forall x < 0, y(x) = -24 \frac{e^x}{x^2} + x^2 + 4x + 12 + \frac{24}{x} + \frac{24}{x^2} \end{cases}$$

## Exercice 5

1. On a pour équation caractéristique  $(EC) : r^2 + 8r + 15 = 0 \Leftrightarrow (r + 3)(r + 5) = 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-3t} + \mu e^{-5t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

2. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = 2y'(x) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \lambda e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{2x} + \mu.\end{aligned}$$

3. • Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) = 0$ .

L'équation caractéristique est  $(EC) : r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r-2) = 0$  donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• On cherche une solution particulière de la forme  $y : x \mapsto e^x (a \cos(x) + b \sin(x))$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$y'(x) = e^x (a \cos(x) + b \sin(x) - a \sin(x) + b \cos(x)) = e^x ((a+b) \cos(x) + (b-a) \sin(x))$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}y''(x) &= e^x ((a+b) \cos(x) + (b-a) \sin(x) - (a+b) \sin(x) + (b-a) \cos(x)) \\ &= e^x (2b \cos(x) - 2a \sin(x)).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y(x) &= e^x \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x ((2b-4a) \cos(x) + (-2a-4b) \sin(x)) &= e^x \cos(x) \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (2b-4a) \cos(x) + (-2a-4b) \sin(x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Pour  $x = \frac{\pi}{2}$ , on trouve  $-2a - 4b = 0$  d'où  $a = -2b$ .

Pour  $x = 0$ , on trouve  $2b - 4a = 1$  d'où  $10b = 1$ , i.e.  $b = \frac{1}{10}$  et  $a = -\frac{1}{5}$ .

Une solution particulière est donc  $y : x \mapsto e^x (-\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x))$ .

Finalement,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} + e^x (-\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

4.  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 0$ .

On a pour équation caractéristique  $(EC) : r^2 - 4r = 0 \Leftrightarrow r(r-4) = 0$  donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^{4x} + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cherchons une solution particulière de  $(E)$  sous la forme  $y(x) = ax^2 + bx$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}, y'(x) = 2ax + b$  et  $y''(x) = 2a$  donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 4y'(x) = 8x - 16 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2a - 4(2ax + b) = 8x - 16 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -8ax + 2a - 4b = 8x - 16\end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} -8a &= 8 \\ 2a - 4b &= -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -1 \\ b &= \frac{7}{2} \end{cases}$$

On a donc pour solution particulière  $y(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x$ .

Finalement,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda e^{4x} + \mu - x^2 + \frac{7}{2}x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

5. Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$ .

On considère l'équation caractéristique  $(EC) : r^2 + 2r + 2 = 0$ .

Cette équation a pour discriminant  $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$  donc les racines sont  $r_1 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$  et  $r_2 = -1 + i$ .

Les solutions de  $(H)$  sont donc  $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Cherchons une solution particulière de  $(E)$  sous la forme  $y(x) = (ax + b)e^x$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}, y'(x) = e^x(ax + a + b)$  et  $y''(x) = e^x(ax + 2a + b)$ .

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 3xe^x &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x(5ax + 4a + 5b) = 3xe^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 5ax + 4a + 5b = 3x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} 5a &= 3 \\ 4a + 5b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{3}{5} \\ b &= -\frac{4a}{5} = -\frac{12}{25} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction  $y : x \mapsto (\frac{3}{5}x - \frac{12}{25})e^x$  est une solution particulière de  $(E)$  donc

$$\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + \left(\frac{3}{5}x - \frac{12}{25}\right)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

6. Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}, z(x) = y'(x)$ .

Alors  $(E) \Leftrightarrow (E') : \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) = \frac{2}{1+x^2}$ .

Soit  $(H) : \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) = 0$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{z : x \mapsto \lambda e^{-\ln(1+x^2)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{z : x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ .

Cherchons une solution particulière de  $(E')$  grâce à la méthode de variation de la constante, i.e. sous la forme  $z(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x^2}$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + \frac{2x}{1+x^2}z(x) &= \frac{2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \lambda(x) \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}z(x) &= \frac{2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) &= 2 \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) &= 2x + c \\ \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) &= \frac{2x}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2} \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{S}_{E'} = \left\{z : x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ .

Or,  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y'$  est solution de  $(E')$  donc  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, y(x) = \lambda \arctan(x) + \ln(1+x^2) + \mu.$$

Finalement,  $\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda \arctan(x) + \ln(1+x^2) + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

## Exercice 6

Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(2 - x)$ .

Puisque la fonction  $x \mapsto f(2 - x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(2 - x) = -f(2 - (2 - x)) = -f(x),$$

d'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) + f(x) = 0$ .

L'équation caractéristique associée à cette équation linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants est  $r^2 + 1 = 0$  dont les racines sont  $i$  et  $-i$ .

On en déduit qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ .

Il en découle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \mu \cos(x) - \lambda \sin(x)$ .

On a alors l'équivalence

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mu \cos(x) - \lambda \sin(x) = \lambda \cos(2 - x) + \mu \sin(2 - x).$$

Pour  $x = 0$ , on obtient  $\mu = \lambda \cos(2) + \mu \sin(2)$  d'où  $\mu = \frac{\lambda \cos(2)}{1 - \sin(2)}$  (on a bien  $\sin(2) \neq 1$ ).

Pour  $x = 2$ , on obtient  $\mu \cos(2) - \lambda \sin(2) = \lambda$  d'où  $\lambda = \frac{\mu \cos(2)}{1 + \sin(2)}$  (on a bien  $\sin(2) \neq -1$ ).

Or, si  $\mu = \frac{\lambda \cos(2)}{1 - \sin(2)}$ , on a bien  $\frac{\mu \cos(2)}{1 + \sin(2)} = \frac{\lambda \cos^2(2)}{1 - \sin^2(2)} = \lambda$ , ce qui signifie qu'on ne pourra pas déterminer  $\lambda$  de façon unique.

On a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lambda \left( \cos(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(x) \right)$ .

• **Synthèse :** Supposons qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \lambda \left( \cos(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(x) \right)$ .

On a alors pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \lambda \left( -\sin(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \cos(x) \right)$ .

Par ailleurs, pour tout réel  $x$ , on a

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= \lambda \left( \cos(2 - x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(2 - x) \right) \\ &= \lambda \left( \cos(2) \cos(x) + \sin(2) \sin(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} (\sin(2) \cos(x) - \cos(2) \sin(x)) \right) \\ &= \frac{\lambda}{1 - \sin(2)} ((\cos(2) - \cos(2) \sin(2) + \cos(2) \sin(2)) \cos(x) + (\sin(2) - \sin^2(2) - \cos^2(2)) \sin(x)) \\ &= \frac{\lambda}{1 - \sin(2)} (\cos(2) \cos(x) + (\sin(2) - 1) \sin(x)) \\ &= \lambda \left( -\sin(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \cos(x) \right) \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(2 - x)$  est

$$\left\{ f : x \mapsto \lambda \left( \cos(x) + \frac{\cos(2)}{1 - \sin(2)} \sin(x) \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Exercice 7

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  s'annulant en 0. Autrement dit,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout

$x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$  et  $F(0) = 0$ .

L'équation qu'on doit résoudre s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3F(x) = 2xF'(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) - \frac{3}{2x}F(x) = 0 \text{ et } F(0) = 0.$$

Il existe donc deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que pour tout  $x > 0, F(x) = \lambda e^{\frac{3}{2}\ln(x)} = \lambda x^{\frac{3}{2}}$  et pour tout  $x < 0, F(x) = \mu e^{\frac{3}{2}\ln(-x)} = \mu(-x)^{\frac{3}{2}}$ .

On a bien  $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$ .

On en déduit que pour tout  $x > 0, f(x) = F'(x) = \frac{3}{2}\lambda\sqrt{x}$  et pour tout  $x < 0, f(x) = F'(x) = -\frac{3}{2}\mu\sqrt{-x}$ .

On a bien dans ce cas  $0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .

Finalement, les fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  telles qu'on ait pour tout réel  $x, 3 \int_0^x f(t)dt = 2xf(x)$  sont les fonctions  $f$  telles que

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0, f(x) &= \frac{3}{2}\lambda\sqrt{x} \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, f(x) &= -\frac{3}{2}\mu\sqrt{-x}. \end{cases}$$

## Exercice 8

1. L'équation caractéristique associée est  $r^2 - 1 = 0$  dont les racines sont  $-1$  et  $1$  donc les solutions sont

$$\{z : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. Posons pour tout réel  $t, z(t) = y''(t) - y(t)$ .

On a pour tout réel  $t, z''(t) = y^{(4)}(t) - y''(t)$ .

On obtient l'équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y^{(4)}(t) - 2y''(t) + y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - z(t) = 0.$$

D'après la première question, ceci équivaut à l'existence de deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}. \quad (E)$$

- Considérons l'équation homogène associée

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = 0. \quad (H)$$

D'après la première question,  $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .

- Cherchons une solution particulière à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \lambda e^t \quad (E_1)$$

sous la forme  $y(t) = ate^t$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

On a pour tout réel  $t, y'(t) = e^t(at + a)$  et  $y''(t) = e^t(at + 2a)$ .

On a donc l'équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \lambda e^t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2ae^t = \lambda e^t.$$

Pour  $t = 0$ , on obtient  $2a = \lambda$  d'où  $a = \frac{\lambda}{2}$ , i.e. pour tout réel  $t$ ,  $y(t) = \frac{\lambda t}{2}e^t$  est une solution particulière de  $(E_1)$ .

• Cherchons une solution particulière à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \mu e^{-t} \quad (E_2)$$

sous la forme  $y(t) = bte^{-t}$  où  $b \in \mathbb{R}$ .

On a pour tout réel  $t$ ,  $y'(t) = e^{-t}(-bt + b)$  et  $y''(t) = e^{-t}(bt - b - b) = (bt - 2b)e^{-t}$ .

On a donc l'équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - y(t) = \mu e^{-t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -2be^{-t} = \mu e^{-t}.$$

Pour  $t = 0$ , on obtient  $-2b = \mu$  d'où  $b = -\frac{\mu}{2}$ , i.e. pour tout réel  $t$ ,  $y(t) = -\frac{\mu t}{2}e^t$  est une solution particulière de  $(E_2)$ .

Par principe de superposition, la fonction  $t \mapsto \frac{\lambda t}{2}e^t - \frac{\mu t}{2}e^{-t}$  est une solution particulière de  $(E)$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de  $(E)$ , et donc par équivalence, de l'équation de départ, est

$$\left\{ y : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} + \frac{\lambda t}{2}e^t - \frac{\mu t}{2}e^{-t}, (\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

## Exercice 9

- Supposons que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $g$  l'est également et on a pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = g(x)(1 + e^x)$  d'où  $f'(x) = g'(x)(1 + e^x) + g(x)e^x$  et

$$f''(x) = g''(x)(1 + e^x) + g'(x)e^x + g'(x)e^x + g(x)e^x = g''(x)(1 + e^x) + 2g'(x)e^x + g(x)e^x.$$

On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^3 g''(x) + ((1 + e^x)e^x - 2e^{2x} - 3e^x - 1)(1 + e^x)g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 g''(x) + (-e^{2x} - 2e^x - 1)g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 g''(x) - (1 + e^x)^2 g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(H)$ .

- $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- $\mathcal{S}_E = \{f : x \mapsto (\lambda e^x + \mu e^{-x})(1 + e^x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .