Corrigé du devoir maison n°7

Exercice 1 : Modèle de Malthus

1. Les solutions de l'équation différentielle sont $\{N : t \longmapsto \lambda e^{rt}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Puisque $\lambda = N(0)$, avec $N(0)$ l'effectif de la population au temps $t = 0$, on a nécessairement $\lambda = N(0) \geqslant 0$.
   Ainsi, pour tout $t \geqslant 0, N(t) = N(0)e^{rt}$ avec $N(0) \geqslant 0$.
   • Si $N(0) = 0$, la fonction N est identiquement nulle.
   On suppose dorénavant que $N(0) > 0$.
   • Si $r = 0$, la fonction N est constante égale à $N(0)$.
   • Si $r > 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$. Si le taux d'accroissement est strictement positif, la population ne va cesser d'augementer sans atteindre de limite finie.
   • Si $r < 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0$. Si le taux d'accroissement est strictement négatif, la population va s'éteindre.
2. Il faut résoudre l'équation différentielle $N'(t) = \cos(t)N(t)$, i.e. $N'(t) - \cos(t)N(t) = 0$.
   Une primitive de $t \longmapsto -\cos(t)$ est $t \longmapsto -\sin(t)$ donc les solutions de l'équation différentielle sont
   $$\{N : t \longmapsto \lambda e^{\sin(t)}, \lambda \in \mathbb{R}.\}$$
   On a comme dans la question précédente, $N(0) = \lambda e^{\sin(0)} = \lambda e^0 = \lambda$ donc pour tout $t \geqslant 0, N(t) = N(0)e^{\sin(t)}$.
   On a pour tout $t \geqslant 0, -1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ donc par croissance de la fonction exponentielle, pour tout $t \geqslant 0, e^{-1} \leqslant e^{\sin(t)} \leqslant e$ donc, puisque $N(0) \geqslant 0$, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$N(0)e^{-1} \leqslant N(t) \leqslant N(0)e.$$
   Si $N(0) > 0$, alors pour tout $t \geqslant 0, N(t) \geqslant N(0)e^{-1} > 0$ donc la population ne risque pas l'extinction.
3. Il faut résoudre l'équation différentielle $(E) : N'(t) - rN(t) = m$ avec $r < 0$.
   On résout d'abord l'équation homogène $(H) : N'(t) - rN(t) = 0$ dont les solutions sont $\mathcal{S}_H = \{N : t \longmapsto \lambda e^{rt}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   On trouve ensuite une solution particulière à l'équation (E). On constate que la fonction constante $t \longmapsto N(t) = -\dfrac{m}{r}$ est solution de (E).
   D'après le théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on sait que l'ensemble des solutions de (E) est
   $$\mathcal{S}_E = \left\{N : t \longmapsto \lambda e^{rt} - \frac{m}{r}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
   On a $N(0) = \lambda - \dfrac{m}{r}$ donc $\lambda = N(0) + \dfrac{m}{r}$.
   Ainsi, pour tout $t \geqslant 0, N(t) = \left(N(0) + \dfrac{m}{r}\right) e^{rt} - \dfrac{m}{r}$.

Pour tout $t \geqslant 0, N'(t) = r\left(N(0) + \frac{m}{r}\right)e^{rt}$.
On a $r < 0$ et pour tout $t \geqslant 0, e^{rt} > 0$.
• Si $N(0) + \frac{m}{r} = 0$, la fonction N est constante égale à $-\frac{m}{r}$.
• Si $N(0) + \frac{m}{r} < 0$, i.e. $N(0) < -\frac{m}{r}$, alors pour tout $t \geqslant 0, N'(t) > 0$ donc la fonction N est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
• Si $N(0) + \frac{m}{r} > 0$, i.e. $N(0) > -\frac{m}{r}$, alors pour tout $t \geqslant 0, N'(t) < 0$ donc la fonction N est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Dans tous les cas, puisque $r < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{rt} = 0$, donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} N(t) = -\frac{m}{r}.}$$

Exercice 2 : Une équation différentielle d'ordre 2 à cœfficients non constants

1. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $g = y\circ\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^x y'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x).$$

   Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) &= e^x y'(e^x) + e^{2x}y''(e^x) + (a-1)e^x y'(e^x) + by(e^x) \\ &= e^{2x}y''(e^x) + ae^x y'(e^x) + by(e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   car pour tout $x \in]0, +\infty[, x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \in]0, +\infty[$.
   On en déduit que $\boxed{y \circ \exp \text{ est bien solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.}$

2. Réciproquement, soit g une solution de (E') sur $\mathbb{R}$. Posons $y = g \circ \ln$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors pour tout $x > 0$,

$$y'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln(x)) \quad \text{et} \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2}g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}g''(\ln(x)).$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) &= -g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) + ag'(\ln(x)) + bg(\ln(x)) \\ &= g''(\ln(x)) + (a-1)g'(\ln(x)) + bg\ln(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

   car pour tout $x \in \mathbb{R}, g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) = 0$.
   On en déduit que $\boxed{g \circ \ln \text{ est bien solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

3. (a) Supposons que $a = 3$ et $b = 1$. L'équation (E') est alors

$$u'' + 2u' + u = 0.$$

   L'équation caractéristique associée est $x^2 + 2x + 1 = 0$ dont -1 est une racine double. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\{g : t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{-t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

Or, d'après les deux questions précédentes, g est solution de (E') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $g \circ \ln$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont

$$\boxed{\{y : t \longmapsto (\lambda + \mu \ln(t))e^{-\ln(t)}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{y : t \longmapsto \frac{1}{t}(\lambda + \mu \ln(t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

(b) Supposons que $a = 1$ et $b = 4$. L'équation (E') est alors

$$u'' + 4u = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $x^2 + 4 = 0$ dont les racines sont $2i$ et $-2i$. Ainsi, les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont

$$\boxed{\{g : t \longmapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

Comme précédemment, on en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont

$$\boxed{\{y : t \longmapsto \lambda \cos(2\ln(t)) + \mu \sin(2\ln(t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$