Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir maison n°8
A rendre pour le Mercredi 24 Janvier 2024

Problème : Lemme de Césaro, critères de Cauchy et de d'Alembert

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Le but de cette question est de montrer le critère de d'Alembert, qui affirme que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On suppose donc qu'il existe $l \in [0, 1[$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

   (a) Soit $q \in]l, 1[$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{q^{n+1}}{q^n}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$.

   (Indication : on pourra commencer par vérifier que la suite $(\frac{u_n}{q^n})_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.)

   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

   (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel l.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n}$.

   Le but de cette question est de montrer le lemme de Césaro, qui affirme que $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$.

   Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |S_n - l| \leqslant \frac{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k - l\right|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\varepsilon.$$

   (b) En déduire qu'il existe un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N, |S_n - l| \leqslant 2\varepsilon.$$

   (c) En conclure que $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Le but de cette question est de montrer le critère de Cauchy, qui affirme que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} < 1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On suppose donc qu'il existe $l \in [0, 1[$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$.

   (a) Soit $q \in]l, 1[$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant q$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
   (c) Conclure.

5. Dans cette question, on montre que si le critère de d'Alembert s'applique, alors le critère de Cauchy s'applique également.

   Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ où $l \in]0, 1[$.

   (a) Vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(l)$.
   (b) En appliquant le lemme de Césaro à une suite bien choisie, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(l)$.
   (c) En conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$.