

Corrigé de la liste d'exercices n°10

Suites réelles

Exercice 1

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{4^n n!^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{4(n+1)}{2n+1} = \frac{4n+4}{2n+1} > 1$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 2

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{n}{3} < \lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor \leq 1 - \frac{n}{3}$ donc $-\frac{1}{3} < \frac{\lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor}{n} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{3}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, on déduit du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 1 - \frac{n}{3} \rfloor}{n} = -\frac{1}{3}.$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 + (-1)^n \leq -1$ donc $(-2 + (-1)^n)n \leq -n$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 + (-1)^n)n = -\infty$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -2n^2 + n(1 + \sin(n)) = n^2 \left(-2 + \frac{1 + \sin(n)}{n} \right).$$

La suite $(1 + \sin(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin(n)}{n} = 0$.

On en déduit par somme de limites que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1 + \sin(n)}{n} = -2$ donc par produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-2 + \frac{1 + \sin(n)}{n} \right) = -\infty.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (3n-1)^7 - (2n-1)^6 = n^7 \left(3 - \frac{1}{n} \right)^7 - n^6 \left(2 - \frac{1}{n} \right)^6 = n^7 \left[\left(3 - \frac{1}{n} \right)^7 - \frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^6 \right].$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} \right)^7 - \frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^6 = 3^7$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^5(1 + \frac{1}{n^2})}{n^5(\frac{\sin(n)}{n^3} - 1)} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{\sin(n)}{n^3} - 1}.$$

Puisque $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} - 1 = -1.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ donc par quotient, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

7. En multipliant par n^3 le numérateur et le dénominateur, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n - 2n^2}{n + (-1)^n} = \frac{n^2(\frac{1}{n} - 2)}{n(1 + \frac{(-1)^n}{n})} = n \frac{\frac{1}{n} - 2}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}.$$

Puisque $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 2$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - 2}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = -2$ donc par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\frac{1}{n} - 2}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = -\infty.$$

Exercice 3

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n = \sqrt{n(n+1)} - n &= \frac{(\sqrt{n(n+1)} - n)(\sqrt{n(n+1)} + n)}{\sqrt{n(n+1)} + n} \\ &= \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}.$$

Puisque $\frac{2}{3} \in] -1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -1$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \left(\frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = 3 \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = 3e^{\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{2} \right)}.$$

Puisque $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{2} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right)$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{2} \right) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{2} \right)} = 1$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x_n = \frac{2 \sum_{k=0}^{n-1} k + n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(n-1)n + n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n^2}{n^2 + n} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$ donc par composition de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 4

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1 - n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n = -\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. Puisque $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$.

Par ailleurs, la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \sin(n) = 0$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n \left(1 + \frac{\sin(n)}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1 + \frac{\sin(n)}{n}}{n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}.$$

Puisque $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$. Finalement, par quotient, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin(n)}{n}}{n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 0.$$

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n}.$$

Par croissance comparée, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Puisque $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée,

on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

On a déjà vu par ailleurs que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n \left(1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \right).$$

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 1$ donc par produit, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left((-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \right) = +\infty.$$

6. Puisque pour tout réel x , $|\sin(x)| \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n| = \left| \frac{1}{2} \sin(n!) \right|^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Puisque $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ donc par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 5

1. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{n^2+3 - (n^2+1)}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})} = \frac{2}{(\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1})}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ donc par composition de limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Par produit, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cos\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$.

3. Puisque $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

4. Puisque $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = e.$$

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $n + k \leq 2n$ donc $\frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$. En sommant pour k allant de 1 à n , on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ donc par comparaison, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $n + 1 \leq n + k \leq 2n$ donc

$$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

En sommant pour k allant de 1 à n , on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+1)^2}$$

d'où

$$\frac{1}{4n} \leq v_n \leq \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{n + 2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De même,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exercice 7

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2x - 1 < \lfloor n^2x \rfloor \leq n^2x$ donc $nx - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n^2x \rfloor}{n} \leq nx$.

• Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$.

• Si $x > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx - \frac{1}{n} = +\infty$ donc par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n^2x \rfloor}{n} = +\infty.$$

• Si $x < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx = -\infty$ donc par comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n^2x \rfloor}{n} = -\infty$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$ donc $\frac{kx - 1}{n^2} < \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2} \leq \frac{kx}{n^2}$.

En sommant pour k allant de 1 à n , on trouve

$$\sum_{k=1}^n \frac{kx - 1}{n^2} < \sum_{k=1}^n \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{kx}{n^2}$$

d'où

$$\frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} < v_n \leq \frac{n(n+1)x}{2n^2}.$$

Or, $\frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(1 + \frac{1}{n})x}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2}$ donc d'après

le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 8

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq k^n |u_0|$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $k^0 |u_0| = |u_0| \geq |u_0|$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $|u_n| \leq k^n |u_0|$. Montrons que $|u_{n+1}| \leq k^{n+1} |u_0|$.

Par propriété de la suite, on a $|u_{n+1}| \leq k |u_n|$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence (et puisque $k > 0$), on en déduit que

$$|u_{n+1}| \leq k \times k^n |u_0| = k^{n+1} |u_0|,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n| \leq k^n |u_0|$.

Or, puisque $k \in]0, 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |u_0| = 0$ donc par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0, \text{ i.e. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 9

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 1$ donc en multipliant par u_n (qui est positif), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$, par hypothèse, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

En échangeant u_n et v_n (qui jouent des rôles symétriques), on trouve de même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Exercice 10

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$.

Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $\frac{u_n}{2} > 0$ et $\frac{1}{u_n}$ d'où $\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} > 0$, ce qui assure que $u_{n+1} > 0$ et achève la récurrence.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Ceci prouve que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$. Or, on a également $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ donc on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

Or, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$ donc $u_n^2 \geq 2$ d'où $2 - u_n^2 \leq 0$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n > 0$, on en déduit que $\frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui assure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente de limite $l \geq \sqrt{2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$, et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}$, on obtient

$$l = \frac{l^2 + 2}{2l}$$

d'où $l^2 = 2$, i.e. $l = \pm\sqrt{2}$. Puisque $l \geq \sqrt{2}$, on en déduit que $l = \sqrt{2}$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Exercice 11

1. On a $u_7 - u_3 = 4r$ donc $4r = 3$ d'où $r = \frac{3}{4}$.

Or, on a également $u_3 = u_0 + 3r = u_0 + \frac{9}{4}$ donc $u_0 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = \frac{15 + 3n}{4}$.

2. On a $\frac{v_{14}}{v_3} = q^{11}$ donc $q^{11} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ d'où $q = \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{11}}$.

Or, on a également $v_3 = v_0 \times q^3$ donc $v_0 = \frac{v_3}{q^3} = 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{3}{11}}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{3}{11}} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{n}{11}} = 6 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{n-3}{11}}$.

3. On a $\sum_{k=0}^{100} u_k = 101 \times \frac{u_0 + u_{100}}{2} = 101 \times \frac{1 + 1 + 100r}{2} = 101(1 + 50r)$.

Ainsi, $2 = 101 + 50 \times 101r$, d'où $-99 = 5050r$, i.e. $r = -\frac{99}{5050}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 1 - \frac{99n}{5050}$.

Exercice 12

1. On a $x = -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc $c = -1$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$.

•**Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > -1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > -1$. Montrons que $u_{n+1} > -1$.

On a

$$u_{n+1} + 1 = -\frac{1}{u_n + 2} + 1 = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Puisque $u_n > -1$, on a $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 2 > 1 > 0$ donc $\frac{u_n + 1}{u_n + 2} > 0$, ce qui montre que $u_{n+1} + 1 > 0$, i.e. $u_{n+1} > -1$.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$, ce qui montre d'une part que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$ et assure la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1} = 1 + v_n$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n = \frac{1}{u_0 + 1} + n = \frac{1}{2} + n = \frac{2n + 1}{2}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{2}{2n + 1} - 1 = \frac{1 - 2n}{2n + 1}$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\frac{1}{n} - 2}{2 + \frac{1}{n}}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 2 = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ donc par quotient, on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Exercice 13

Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 2l - 1$, i.e. $l = 1$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l = u_n - 1$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2(u_n - 1) = 2v_n$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 - 1)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 1 = 2^n(u_0 - 1) + 1$.

Puisque $2 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

- Si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- Si $u_0 > 1$, on a $u_0 - 1 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(u_0 - 1) + 1 = +\infty$.
- Si $u_0 < 1$, on a $u_0 - 1 < 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n(u_0 - 1) + 1 = -\infty$.

Exercice 14

Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 3l + 1$, i.e. $l = -\frac{1}{2}$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l = u_n + \frac{1}{2}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n v_0 = 3^n(u_0 + \frac{1}{2}) = 3^n \times \frac{11}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \frac{1}{2} = 3^n \times \frac{11}{2} - \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{11}{2} \sum_{k=0}^n 3^k - \frac{n+1}{2} = \frac{11}{2} \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} - \frac{n+1}{2} = \frac{11(3^{n+1} - 1) - 2n - 2}{4}$$

d'où $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{11 \times 3^{n+1} - 2n - 13}{4}$.

Exercice 15

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.

L'équation caractéristique associée est (EC) : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)^2 = 0$ donc l'équation admet $r = 1$ comme racine double.

Il existe donc deux réels (λ, μ) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)r^n = \lambda + \mu n.$$

Pour $n = 0$, on obtient $u_0 = \lambda$ et pour $n = 1$, $u_1 = \lambda + \mu$ donc $\mu = u_1 - \lambda = u_1 - u_0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)$.

On remarque que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $u_1 - u_0$.

On pouvait le remarquer dès le début car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 16

1. On considère l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$.

Il existe donc deux réels (λ, μ) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$

Pour $n = 0$, on trouve $u_0 = \lambda$ d'où $\lambda = -1$.

Pour $n = 1$, on trouve $u_1 = 2(-1 + \mu)$ d'où $-2 + 2\mu = 2$, i.e. $\mu = 2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n(2n - 1)$.

2. On considère l'équation caractéristique $r^2 - 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 1)(r - 4) = 0$ donc les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.

Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 4^n$.

Pour $n = 0$, on trouve $4 = \lambda + \mu$.

Pour $n = 1$, on trouve $5 = -\lambda + 4\mu$ d'où $\mu = \frac{9}{5}$ et $\lambda = \frac{11}{5}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{11}{5} \times (-1)^n + \frac{9}{5} \times 4^n$.

3. On considère l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Les racines sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Il existe donc un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \cos(\frac{2n\pi}{3}) + \mu \sin(\frac{2n\pi}{3})$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \lambda$ d'où $\lambda = 1$.

Pour $n = 1$, on a $u_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \mu \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\mu \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, d'où $\mu = 2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(\frac{2n\pi}{3}) + 2 \sin(\frac{2n\pi}{3})$.

Exercice 17

1. On montre facilement par récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

En effet, la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Alors $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} > 0$.

On peut donc poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln(\sqrt{u_{n+1}u_n}) = \frac{1}{2} \ln(u_{n+1}) + \frac{1}{2} \ln(u_n)$ donc

$$v_{n+2} - \frac{1}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0.$$

On considère l'équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$.

Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$. Il existe alors un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \ln(u_n)$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{\lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Pour $n = 0$, on trouve $e^{\lambda + \mu} = e^3$ donc $\lambda + \mu = 3$.

Pour $n = 1$, on trouve $e^{\lambda - \frac{\mu}{2}} = 1$ donc $\lambda - \frac{\mu}{2} = 0$.

Ainsi, $\mu = 2$ et $\lambda = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1}$.

2. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ donc on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(v_n)$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(\sqrt{v_n}) = \frac{1}{2} \ln(v_n) = \frac{1}{2} u_n$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{u_0}{2^n} = \frac{\ln(v_0)}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n} = e^{2^{1-n}}$.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n + \frac{4}{3}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 2\left(w_{n+2} + \frac{4}{3}\right) - 3\left(w_{n+1} + \frac{4}{3}\right) - 2\left(w_n + \frac{4}{3}\right) = 2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n - 4 = 0.$$

On a l'équation caractéristique $2r^2 - 3r - 2 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = u_n - \frac{4}{3} = \lambda 2^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.$$

Pour $n = 0$, on trouve $11 = \lambda + \mu - \frac{4}{3}$ d'où $\lambda + \mu = \frac{37}{3} \Rightarrow 2\lambda + 2\mu = \frac{74}{3}$.

Pour $n = 1$, on trouve $25 = 2\lambda - \frac{\mu}{2} - \frac{4}{3}$ d'où $\frac{79}{3} = 2\lambda - \frac{\mu}{2}$.

En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{5\mu}{2} = -\frac{5}{3}$ d'où $\mu = -\frac{2}{3}$.

Puisque $\lambda = \frac{37}{3} - \mu$, on obtient $\lambda = 13$.

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 13 \times 2^n + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{4}{3}$.

4. La suite n'est bien définie que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.

En effet, on a $x_2^2 = x_1^3 x_0^2 = e^{75} e^{22}$ donc $x_2 = \pm \sqrt{e^{99}}$.

Or, si $x_2 = -\sqrt{e^{99}}$, on a $x_3^2 = x_2^3 x_1^2 = -\sqrt{e^{99}^3} e^{50} < 0$, ce qui est impossible car $x_3 \in \mathbb{R}$.

On peut donc supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(x_n)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \ln(x_{n+2}) = \frac{1}{2} \ln(x_{n+2}^2) = \frac{1}{2} \ln(x_{n+1}^3 x_n^2) = \frac{3}{2} \ln(x_{n+1}) + \ln(x_n) = \frac{3}{2} u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \frac{3}{2}r - 1 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$.

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = e^{u_n} = e^{\lambda 2^n + \mu(-\frac{1}{2})^n}.$$

Pour $n = 0$, on trouve $e^{11} = e^{\lambda + \mu}$ d'où $\lambda + \mu = 11 \Rightarrow 2\lambda + 2\mu = 22$.

Pour $n = 1$, on trouve $e^{25} = e^{2\lambda - \frac{\mu}{2}}$ d'où $2\lambda - \frac{\mu}{2} = 25$.

En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{5\mu}{2} = -3$ d'où $\mu = -\frac{6}{5}$.

Puisque $\lambda = 11 - \mu$, on obtient $\lambda = \frac{61}{5}$.

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{\frac{61}{5} \times 2^n - \frac{6}{5}(-\frac{1}{2})^n}$.

Exercice 18

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leq 5 = v_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \leq v_n$. Montrons que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.

On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \geq 0$ par hypothèse de récurrence, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \geq 0$ d'après la question précédente donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) \leq 0$ d'après la question précédente donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Enfin, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ donc la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \frac{v_0 - u_0}{3^n}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

On a donc bien montré que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. D'après le théorème sur les suites adjacentes, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite l .

En particulier, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 2l$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$ donc la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $u_0 + v_0 = 6$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 6 = 2l$ d'où $l = 3$.

Finalement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

Exercice 19

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2(n+1)} - L_{2n} = L_{2n+2} - L_{2n} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \leq 0$$

donc la suite $(L_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2(n+1)+1} - L_{2n+1} = L_{2n+3} - L_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0$$

donc la suite $(L_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{2n+1} - L_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites $(L_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc bien adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, ceci implique que les suites $(L_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite l .

On en conclut que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite l . (On peut en fait montrer que $l = -\ln(2)$.)

Exercice 20

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$ par hypothèse de récurrence, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq v_{n+1}$, ce qui implique que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.

3. • Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}).$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\sqrt{u_n} > 0$. D'autre part, on sait que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n \leq v_n$ donc par croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n}$, i.e. $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geq 0$.

Il en découle que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui prouve la croissance de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

- Pour tout $n \geq 1$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

d'après la question précédente donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

4. • On a pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.

Puisque la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, alors pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq v_1$ donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n \leq v_1$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par v_1 . D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

• De même, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante donc pour tout $n \geq 1$, $u_1 \leq u_n \leq v_n$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par u_1 . D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$.

• En passant à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on trouve $l' = \frac{l + l'}{2}$ d'où $l = l'$.

Finalement, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc bien convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$.

5. On a déjà vu que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Enfin, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = l - l = 0$.

Les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont donc bien adjacentes.

Remarque : on pouvait montrer dès la question 3 que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes car pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ en utilisant le résultat de l'exercice 8.

Exercice 21

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

• **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 2 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

Alors $\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} > 0$ donc $\frac{2}{u_{n+1}} > 0$, ce qui implique que $u_{n+1} > 0$.

De même, $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$ donc $v_{n+1} > 0$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{u_n + v_n}{u_n v_n}$ donc $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

Or, $(u_n - v_n)^2 \geq 0$ et d'après la question précédente, $u_n + v_n > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$, ce qui implique que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.

Puisque $u_0 = 1 \leq 2 = v_0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $u_n + v_n > 0$ et $v_n - u_n \geq 0$ d'après la question précédente donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

d'après la question précédente, donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0$ et d'après la question 2), $u_n \leq v_n \leq v_0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 . D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

De même, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$ et d'après la question 2), $v_n \geq u_n \geq u_0$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 . D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$.

En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on trouve

$$l' = \frac{l + l'}{2} \Leftrightarrow 2l' = l + l' \Leftrightarrow l = l'.$$

On en déduit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n.$$

On en déduit que la suite $(u_nv_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_nv_n = u_0v_0 = 2$.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

On a alors par unicité de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_nv_n = l^2 = 2$ d'où $l = \sqrt{2}$ ou $l = -\sqrt{2}$.

Or, on a prouvé en question 1) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ et si on avait $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\sqrt{2} < 0$, il existerait un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0$, ce qui est absurde.

Nécessairement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{2}$.

Exercice 22

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.

• On sait que la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à chercher parmi les points fixes de f .

Or, on a $f(l) = l \Leftrightarrow \frac{2l+3}{l+2} = l \Leftrightarrow 2l+3 = l^2+2l \Leftrightarrow l^2 = 3 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{3}$.

• On a pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $] -2, +\infty[$ (on s'intéresse à cet intervalle-là car $u_0 = 1$).

Ainsi, f est croissante sur $[1, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) = [\frac{5}{3}, +\infty[\subset [1, +\infty[$, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

On a $u_1 = f(u_0) = \frac{5}{3} \geq 1 = u_0$ et puisque f est croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, \sqrt{3}]$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leq \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [1, \sqrt{3}]$. Montrons que $u_{n+1} \in [1, \sqrt{3}]$.

Puisque $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$, par croissance de f sur $[1, \sqrt{3}]$, on en déduit que

$$1 \leq f(1) = \frac{5}{3} \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

donc $u_{n+1} \in [1, \sqrt{3}]$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, \sqrt{3}]$.

• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\sqrt{3}$ donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in [1, \sqrt{3}]$.

Puisque les limites éventuelles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 23

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-\frac{35}{2}, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{2x + 35}.$$

• La fonction f est croissante sur $[-\frac{35}{2}, +\infty[$.

Cherchons les points fixes de f .

On a $f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{2l + 35} = l \Rightarrow 2l + 35 = l^2 \Rightarrow l^2 - 2l - 35 = 0$.

Les racines de ce trinôme du second degré sont 7 et -5 . Parmi ces deux racines, seule 7 est réellement un point fixe de f .

• Etudions le signe de $f(x) - x$.

- Si $x \in [-\frac{35}{2}, 0[$, on a $f(x) \geq 0$ et $-x \geq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$.

- Si $x \geq 0$, on a (par croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}_+) les équivalences

$$f(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 35} \leq x \Leftrightarrow 2x + 35 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7.$$

Finalement, $f(x) - x \geq 0$ pour $x \in [-\frac{35}{2}, 7]$ et $f(x) - x \leq 0$ pour $x \in [7, +\infty[$.

• Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n + 35 \geq 0 \Leftrightarrow u_n \geq -\frac{35}{2}$.

Pour cela, il suffit que $u_0 \geq -\frac{35}{2}$ car f est à valeurs positives donc pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \geq 0 > -\frac{35}{2}.$$

• Si $u_0 \geq 7$, alors $u_1 = f(u_0) \leq u_0$ et puisque f est croissante sur son domaine de définition, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, on déduit du théorème de la limite monotone que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 7 qui est le seul point fixe de f .

• Si $-\frac{35}{2} \leq u_0 \leq 7$, alors $u_1 = f(u_0) \geq u_0$ et puisque f est croissante sur son domaine de définition, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 7$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 \leq 7$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 7$. Par croissance de f , on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(7) = 7$ donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 7$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 7.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 7 qui est le seul point fixe de f .

Exercice 24

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $] -\infty, 12]$ par

$$f(x) = \sqrt{12 - x}.$$

• La fonction f est décroissante sur $] -\infty, 12]$. De plus, on a $f(0) = \sqrt{12} < 12$ et $f(12) = 0$ donc $f([0, 12]) = [0, \sqrt{12}] \subset [0, 12]$.

Cherchons les points fixes de f . On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{12-x} = x \Rightarrow 12-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0.$$

Les racines de ce trinôme sont 3 et -4 , mais seul 3 est un point fixe de f .

• Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]-\infty, 12]$. Or, f est à valeurs positives donc pour tout $n \geq 1$, on aura $u_n \in [0, 12]$.

Il faut donc que $u_0 \in [-132, 12]$ car $f([-132, 12]) = [0, 12]$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - 3 = \sqrt{12 - u_n} - 3 = \frac{(\sqrt{12 - u_n} - 3)(\sqrt{12 - u_n} + 3)}{\sqrt{12 - u_n} + 3} = \frac{12 - u_n - 9}{\sqrt{12 - u_n} + 3} = \frac{3 - u_n}{3}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 3| \leq \frac{|u_n - 3|}{3}$ et on montre alors aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leq \frac{|u_0 - 3|}{3^n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 3 = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Exercice 25

On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = x + \frac{1+x}{1+2x}.$$

- On a pour tout $l \neq -\frac{1}{2}, f(l) = l \Leftrightarrow \frac{1+l}{1+2l} = 0 \Leftrightarrow l = -1$ donc -1 est le seul point fixe de f .
- On a pour tout $x \neq -\frac{1}{2}, f(x) - x = \frac{1+x}{1+2x}$ donc $f(x) - x \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $f(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [-1, -\frac{1}{2}[$.
- Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = 1 + \frac{1+2x-2(1+x)}{(1+2x)^2} = \frac{(1+2x)^2-1}{(1+2x)^2} = \frac{4x+4x^2}{(1+2x)^2} = \frac{4x(x+1)}{(1+2x)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$			
$f(x) - x$	+	0	-	+	+			
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-1	\searrow	$-\infty$	$+\infty$		
				$+\infty$	\searrow	1	\nearrow	$+\infty$

On a donc plusieurs cas de figure selon le choix de u_0 :

- Si $u_0 \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$: on remarque que $f(]-\frac{1}{2}, +\infty[) = [1 + \infty[\subset]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie, à valeurs dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et puisque pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, f(x) \geq x$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 > -\frac{1}{2}$.

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle convergerait vers une limite l telle que $l \geq u_0 > -\frac{1}{2}$. Or, la seule limite possible pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

-1. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et puisqu'elle est croissante, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• Si $u_0 \in]-\infty, -1]$: on remarque que $f(]-\infty, -1]) =]-\infty, -1]$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et est à valeurs dans $]-\infty, -1]$, donc elle est majorée par -1 .

Puisque pour tout $x \in]-\infty, -1]$, $f(x) \geq x$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$ (qui est le seul point fixe de f).

• Si $u_0 \in]-1, -\frac{1}{2}[$, on a $u_1 = f(u_0) \in]-\infty, -1[$ et on est donc ramené au cas précédent.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} -1 & \text{si } u_0 < -\frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } u_0 > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Exercice 26

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$.

• Déterminons les points fixes de f . On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{a}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Puisque $a > 0$, $-\sqrt{a} < 0 < \sqrt{a}$ donc f admet deux points fixes distincts.

• On a pour tout $x \neq 0$, $f(x) - x = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} - x \right) = \frac{a - x^2}{2x}$ donc $f(x) - x \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{a}] \cup]0, \sqrt{a}[$ et $f(x) - x \leq 0$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{a}, 0[\cup]\sqrt{a}, +\infty[$.

• On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right) = \frac{x^2 - a}{2x^2}$ donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{a}] \cup]\sqrt{a}, +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [-\sqrt{a}, 0[\cup]0, \sqrt{a}[$.

On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	0	\sqrt{a}	$+\infty$	
$f(x) - x$	+	0	-	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	$-\infty$	$+\infty$	\sqrt{a}	$+\infty$

On a donc plusieurs cas de figure selon le choix de u_0 :

• Si $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$, puisque $f([\sqrt{a}, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{a}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par \sqrt{a} .

D'autre part, pour tout $x \in [\sqrt{a}, +\infty[$, $f(x) \leq x$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $-\sqrt{a}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

• Si $u_0 \in]0, \sqrt{a}[$, on a $u_1 = f(u_0) \in [\sqrt{a}, +\infty[$ et on est ramené au cas précédent.

• Si $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{a}[$, puisque $f(]-\infty, -\sqrt{a}[) =]-\infty, -\sqrt{a}[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq -\sqrt{a}$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $-\sqrt{a}$.

D'autre part, pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{a}[$, $f(x) \geq x$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq -\sqrt{a}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers \sqrt{a} donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\sqrt{a}$.

• Si $u_0 \in [-\sqrt{a}, 0[$, alors $u_1 = f(u_0) \in]-\infty, -\sqrt{a}]$ et on est ramenés au cas précédent.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{si } u_0 > 0 \\ -\sqrt{a} & \text{si } u_0 < 0. \end{cases}$

Exercice 27

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}.$$

Or, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Par composition de limites, on trouve finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

2. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n^2 - 1} - n = n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \right) \sim n \times \left(-\frac{1}{2n^2} \right) = -\frac{1}{2n}.$$

Finalement, par produit, on obtient

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) (\sqrt{n^2 - 1} - n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2},$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) (\sqrt{n^2 - 1} - n) = 0$.

3. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$, on a $\tan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

D'autre part, on a $\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1 = \sqrt{1 + \cos(\frac{1}{n}) - 1} - 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0$ donc $\sqrt{1 + \cos(\frac{1}{n})} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^2}$.

Par quotient, on en déduit que $\frac{\sqrt{\cos(\frac{1}{n})} - 1}{\tan\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{4}$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -n^{\frac{10}{3}} (-n^{-\frac{5}{6}} + 1 - n^{-\frac{16}{3}}).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^{-\frac{5}{6}} + 1 - n^{-\frac{16}{3}} = 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -n^{\frac{10}{3}}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 28

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) \sim \sqrt{n} \frac{2}{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$, d'où par composition de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. En particulier, $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^3 - 1 + n^2}{n^2 + 1} = \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = n \times \frac{1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$, on en déduit que $\frac{n^3 - 1 + n^2}{n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} n$.

D'autre part, $\ln(1 + n^4) = \ln(n^4(1 + \frac{1}{n^4})) = \ln(n^4) + \ln(1 + \frac{1}{n^4}) = 4 \ln(n) \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^4})}{4 \ln(n)} \right)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^4}) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \ln(n) = +\infty$ donc par somme et quotient, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^4})}{4 \ln(n)} = 1$, d'où $\ln(1 + n^4) \underset{+\infty}{\sim} 4 \ln(n)$.

Par produit, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} 4n \ln(n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = 0$, on en déduit que $\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$.

Or, $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Ainsi, $\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

5. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n!}\right)\right) = \ln\left(1 + \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n!}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n!}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n!^2}$.

Il en découle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{n}{n!}\right)^2 = -\frac{1}{2(n-1)!^2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2(n-1)!^2} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 2$ donc $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 2$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.