

Problème : Lemme de Césaro, critères de Cauchy et de d'Alembert

1. • Si $q = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

• Si $q \neq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Or, on sait que la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 - q}$.

2. (a) Soit $\varepsilon = q - l > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - l \leq \varepsilon = q - l$.

On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{q^{n+1}} \leq \frac{u_n}{q^n}$ donc la suite $(\frac{u_n}{q^n})_{n \geq n_0}$ est décroissante.

Il en découle que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_n}{q^n} \leq \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} > 0$ car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs. Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, d'après la question précédente, on a pour tout $n \geq n_0$,

$$v_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} \sum_{k=0}^n q^k.$$

Puisque $|q| < 1$, d'après la question 1.a), on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=0}^n q^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. A fortiori, elle est majorée.

Il existe donc un réel M positif tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n q^k \leq M$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} M$.

Or, pour tout $n \leq n_0 - 1$, puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$v_n \leq v_{n_0-1} = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} M.$$

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} M$.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

(d) D'après le théorème de la limite monotone, on en conclut que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Il en découle que pour tout $n \geq n_0$,

$$|S_n - l| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n} - l \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k - nl}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - l)}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_k - l)}{n} \right|$$

D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $n \geq n_0$,

$$|S_n - l| \leq \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l) \right|}{n} + \frac{\left| \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_k - l) \right|}{n} \leq \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l) \right|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - l|}{n}.$$

Or, on sait que pour tout $k \geq n_0$, $|u_k - l| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,

$$|S_n - l| \leq \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l) \right|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1} \varepsilon}{n} = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - l) \right|}{n} + \frac{(n - 1 - n_0 + 1)\varepsilon}{n}.$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \geq n_0, |S_n - l| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} + \frac{n - n_0}{n} \varepsilon.$$

(b) Puisque $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $n - n_0 \leq n$ donc $\frac{n - n_0}{n} \varepsilon \leq \varepsilon$.

Par ailleurs, puisque le terme $\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|$ est constant, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} = 0$

donc il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} \leq \varepsilon$.

Soit $N = \max(n_0, n_1)$.

On a alors pour tout $n \geq N$, $|S_n - l| \leq \varepsilon + \varepsilon$ d'où

$$\forall n \geq N, |S_n - l| \leq 2\varepsilon.$$

(c) On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$.

4. (a) Soit $\varepsilon = q - l > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n^{\frac{1}{n}} - l| \leq \varepsilon$, ce qui implique que pour tout $n \geq n_0$, $u_n^{\frac{1}{n}} - l \leq \varepsilon = q - l$ d'où

$$\text{pour tout } n \geq n_0, u_n^{\frac{1}{n}} \leq q.$$

- (b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0$ car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $n \geq n_0$, $u_n^{\frac{1}{n}} \leq q$, ce qui implique par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq q^n$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, il vient

$$v_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n q^k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=0}^n q^k.$$

Puisque $|q| < 1$, d'après la question 1.a), on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=0}^n q^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. A fortiori, elle est majorée.

Il existe donc un réel M positif tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n q^k \leq M$.

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M$.

Or, pour tout $n \leq n_0 - 1$, puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$v_n \leq v_{n_0-1} = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M.$$

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + M$.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

- (c) D'après le théorème de la limite monotone, on en conclut que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

5. (a) Par hypothèse, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et puisque $l > 0$, on en déduit par continuité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(l)$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(l).$$

6. Appliquons le lemme de Césaro à la suite $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Posons pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)}{n} = \frac{\ln(u_n) - \ln(u_0)}{n}.$$

D'après la question 3, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(l)$, on déduit du lemme de Césaro que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(l)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln(u_n)}{n} = S_n + \frac{\ln(u_0)}{n}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_0)}{n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(l).$$

7. Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(u_n)}{n}} = e^{\ln(l)} = l.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{\frac{\ln(u_n)}{n}} = e^{\ln(u_n^{\frac{1}{n}})} = u_n^{\frac{1}{n}}$.

On en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l$.