Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°4

Samedi 27 janvier 2024 (3h30)

L'énoncé est constitué d'un exercice, d'un problème et comporte 3 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice : Dérivées successives d'une solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2.$$

1. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ (on pourra chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$).
2. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f^{(n)}(0)$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de f. Par exemple, $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$ désigne la dérivée de f'', etc...
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a
   $$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$
   (b) Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

Problème : Autour du nombre d'or

Dans tout le problème, on note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On observera que $\varphi > 1$ et $\varphi' \in]-1, 0[$.
Le problème est constitué de deux parties indépendantes dans lesquelles on pourra librement réutiliser les résultats préliminaires.

Préliminaires

1. Vérifier que $\varphi + \varphi' = 1$ et que $\varphi\varphi' = -1$.
2. En déduire que φ et φ' sont les solutions de l'équation d'inconnue x réelle
$$(E) : x^2 = x + 1.$$

Partie I : Deux suites convergeant vers le nombre d'or

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$, où le nombre 1 apparaît n fois.
   (a) Vérifier que $u_1 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [1, \varphi]$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (d) En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \varphi$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$, où le nombre 1 apparaît n fois.
   On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$.
   (a) Vérifier que $v_1 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$.

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{v_n - \varphi}{v_n - \varphi'}$.

Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie, puis montrer que c'est une suite géométrique de raison $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$. En déduire la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Partie II : Suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).$$

(b) Montrer que $F_n \sim \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.

2. Dans cette question, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

(a) Donner un équivalent de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'elle converge vers φ.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, prouver qu'on a l'égalité $q_{n+1} - q_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$.

Indication : on pourra montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n F_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

(c) Vérifier que les suites $(q_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}}$.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite introduite dans la Partie I.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n = \lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \rfloor$.

4. Le but de cette question est de trouver des relations entre F_n et F_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce aux propriétés du nombre d'or.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n+1} = \varphi F_n + \varphi'^n$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^{n+1} = \varphi F_{n+1} + F_n$.

(c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, F_{2n} = \lfloor \varphi F_{2n-1} \rfloor$ et $F_{2n+1} = \lfloor \varphi F_{2n} \rfloor + 1$.

(d) Déduire de la question 4.(a) que pour tout $n \geqslant 2, F_{n+1} = \lfloor \varphi F_n - \varphi' \rfloor$.

(e) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = F_n + 1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2, x_{n+1} = \lfloor \varphi x_n \rfloor$.