Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice : Dérivées successives d'une solution d'une équation différentielle

1. • On commence par résoudre l'équation homogène

$$(H) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

On considère l'équation caractéristique (EC) : $r^2 - 2r + 2 = 0$.
On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$.
On a deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - i.$$

On a donc $\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto e^x(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
• On cherche désormais une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = ax^2+bx+c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$ donc

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_E &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 + (2b - 4a)x + 2a - 2b + 2c = 2x^2. \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2a & = & 2 \\ 2b - 4a & = & 0 \\ 2a - 2b + 2c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & 2a = 2 \\ c & = & b - a = 1 \end{array}\right.$$

Donc $y : x \mapsto x^2 + 2x + 1$ est une solution particulière de (E).
Finalement, $\boxed{S_E = \{y : x \mapsto e^x(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + x^2 + 2x + 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$

2. Soit $f \in \mathcal{S}_E$. Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + x^2 + 2x + 1.$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) + e^x(-\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)) + 2x + 2.$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda + 1 & = & 1 \\ \lambda + \mu + 2 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 1 \end{array}\right.$$

donc l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$ est $\boxed{f : x \mapsto e^x \sin(x) + x^2 + 2x + 1.}$

3. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2x^2$.
En dérivant successivement cette égalité, on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(3)}(x) - 2f''(x) + 2f'(x) = 4x$$

puis pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(4)}(x) - 2f^{(3)}(x) + 2f''(x) = 4$$

et enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(5)}(x) - 2f^{(4)}(x) + 2f^{(3)}(x) = 0.$$

En dérivant successivement cette nouvelle égalité, on obtient aisément que pour tout $n \geqslant 3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+2)}(x) - 2f^{(n+1)}(x) + 2f^{(n)}(x) = 0.$$

En évaluant en 0, on trouve pour tout $n \geqslant 3$,

$$f^{(n+2)}(0) - 2f^{(n+1)}(0) + 2f^{(n)}(0) = 0,$$

i.e. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 3, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.}$

(b) On considère l'équation caractéristique $(EC) : r^2 - 2r + 2 = 0$.
On a vu en première question que les racines de cette équation caractéristique sont $r_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $r_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \sqrt{2}^n(\alpha\cos(n\frac{\pi}{4}) + \beta\sin(n\frac{\pi}{4}))$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x(\sin(x)+\cos(x))+2x+2,\ f''(x) = e^x(\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)-\sin(x))+2 = 2e^x\cos(x)+2,$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^x(\cos(x)-\sin(x)),\ f^{(4)}(x) = 2e^x(\cos(x)-\sin(x)-\sin(x)-\cos(x)) = -4e^x\sin(x).$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} u_3 &= f^{(3)}(0) \\ u_4 &= f^{(4)}(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}^3(-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta) &= 2 \\ -\sqrt{2}^4\alpha &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta &= 2 \\ \alpha &= 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 3, u_n = \sqrt{2}^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).}$$

Finalement, on a

$$\boxed{f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 3 & \text{si } n = 1 \\ 4 & \text{si } n = 2 \\ \sqrt{2}^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \text{si } n \geqslant 3. \end{cases}}$$

Problème : Autour du nombre d'or

Préliminaires

1. On a $\varphi+\varphi'=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1$ et $\varphi\varphi'=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\dfrac{1+-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1-5}{4}=-1$ donc $\boxed{\varphi+\varphi'=1\,\text{et}\,\varphi\varphi'=-1.}$
2. D'après les relations cœfficients racines, on en déduit que

$$\boxed{\varphi\,\text{et}\,\varphi'\,\text{sont les racines du trinôme du second degré}\,x^2-x-1=0.}$$

Partie I : Deux suites convergeant vers le nombre d'or

1. (a) Si $n=1$, il y a un seul 1 sous la racine donc $\boxed{u_1=\sqrt{1}=1}$.
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $u_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$, où le nombre 1 apparaît n fois. Ainsi $\sqrt{1+u_n}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$, où le nombre 1 apparaît $(n+1)$ fois donc $\boxed{\text{pour tout}\,n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}.}$

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,u_n\in[1,\varphi]$.
   • Pour $n=1$, on a $u_1=1\in[1,\varphi]$ donc la propriété est vraie pour $n=1$.
   • Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n\in[1,\varphi]$. Montrons que $u_{n+1}\in[1,\varphi]$.
   D'après la question précédente, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $2\leqslant 1+u_n\leqslant 1+\varphi$.
   Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

   $$\sqrt{2}\leqslant\sqrt{1+u_n}\leqslant\sqrt{1+\varphi},$$

   i.e. $1\leqslant\sqrt{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant\sqrt{1+\varphi}$.
   Or, d'après la partie précédente, on sait que $\varphi^2=\varphi+1$ donc $\sqrt{\varphi+1}=\sqrt{\varphi^2}=|\varphi|=\varphi$ car $\varphi>0$ d'où $1\leqslant u_{n+1}\leqslant\varphi$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
   D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout}\,n\in\mathbb{N}^*,u_n\in[1,\varphi].}$

   (c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

   $$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+u_n}-u_n=\frac{(\sqrt{1+u_n}-u_n)(\sqrt{1+u_n}+u_n)}{\sqrt{1+u_n}+u_n}=\frac{1+u_n-u_n^2}{\sqrt{1+u_n}+u_n}=\frac{(\varphi-u_n)(u_n-\varphi')}{\sqrt{1+u_n}+u_n}.$$

   On sait d'aprés la question précédente que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,u_n\in[1,\varphi]$ donc $\varphi-u_n\geqslant 0,u_n-\varphi'\geqslant u_n>0$ (car $\varphi'<0$) et $\sqrt{1+u_n}+u_n\geqslant\sqrt{2}+1>0$.
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite}\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\,\text{est croissante.}}$

   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente de limite $l\in\mathbb{R}$.
   Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$, on obtient par passage à la limite que $l=\sqrt{1+l}$ d'où $l^2=1+l$.
   Ainsi, $l=\varphi$ ou $l=\varphi'$.
   Or, pour tout $n\in\mathbb{N},u_n>0$ donc $l\geqslant 0$. Puisque $\varphi'<0,l=\varphi'$ est impossible donc $l=\varphi$.
   Ainsi, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\varphi.}$

2. (a) Si $n=1$, il y a un seul 1 donc $v_1 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $v_n = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$, où le nombre 1 apparaît n fois.

Ainsi, $1 + \dfrac{1}{v_n} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$, où le nombre 1 apparaît $(n+1)$ fois donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}.}$

(b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$. A fortiori, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n > \varphi'$ donc $v_n - \varphi' > 0$ ce qui assure la bonne définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \varphi}{v_{n+1} - \varphi'} = \frac{\frac{1}{v_n} + 1 - \varphi}{\frac{1}{v_n} + 1 - \varphi'} = \frac{(1-\varphi)v_n + 1}{(1-\varphi')v_n + 1} = \frac{\varphi' v_n - \varphi\varphi'}{\varphi v_n - \varphi\varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{v_n - \varphi}{v_n - \varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi} w_n$$

donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$ et de premier terme

$$w_1 = \frac{v_1 - \varphi}{v_1 - \varphi'} = \frac{1-\varphi}{1-\varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \dfrac{\varphi'}{\varphi} \times \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n}$.

Or, $\left|\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n} = 0$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.}$

(c) Par définition de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \frac{v_n - \varphi}{v_n - \varphi'} \Leftrightarrow w_n(v_n - \varphi') = v_n - \varphi \Leftrightarrow v_n(1 - w_n) = \varphi - \varphi' w_n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n} \neq 1$ car $\varphi \neq \varphi'$ donc $1 - w_n \neq 0$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{\varphi - \varphi' w_n}{1 - w_n}.$$

D'après la question précédente, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi - \varphi' w_n = \varphi$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - w_n = 1$.

Par quotient de limites, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \varphi.}$

Partie II : Suite de Fibonacci

1. (a) L'équation caractéristique associée est $(E) : r^2 - r - 1 = 0$.

D'après les résultats préliminaires, on sait que (E) admet deux racines réelles distinctes que sont φ et φ'.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \lambda\varphi^n + \mu\varphi'^n$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \lambda + \mu \\ 1 & = & \lambda\varphi + \mu\varphi' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \mu & = & -\lambda \\ 1 & = & \lambda(\varphi - \varphi') = \lambda\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu & = & -\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{array}\right.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\left(1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n\right)$.

Or, on a déjà vu en question 2.(b) de la partie I que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n = 1.$$

Ainsi, $1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n \sim 1$ donc par produit, on en déduit que $\boxed{F_n \sim \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.}$

Puisque $\varphi > 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = +\infty$, ce qui implique par équivalence que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty.}$

2. (a) D'après la question précédente, $F_{n+1} \sim \dfrac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}$ et $F_n \sim \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ donc par quotient, on en déduit que

$$\boxed{q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi}$$

d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = \varphi.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$q_{n+1} - q_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2}{F_nF_{n+1}}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

• Pour $n = 0$, on a $F_0F_1 + F_0^2 - F_1^2 = -1^2 = -1 = (-1)^{0+1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $F_nF_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
Montrons que $F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$.

On a

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+2}+F_{n+1}^2-F_{n+2}^2 &= F_{n+1}(F_{n+1}+F_n)+F_{n+1}^2-(F_{n+1}+F_n)^2\\
&= F_{n+1}^2+F_nF_{n+1}+F_{n+1}^2-F_{n+1}^2-2F_nF_{n+1}-F_n^2\\
&= -F_nF_{n+1}-F_n^2+F_{n+1}^2\\
&= -(-1)^{n+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

donc $F_{n+1}F_{n+2}+F_{n+1}^2-F_{n+2}^2=(-1)^{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}, F_nF_{n+1}+F_n^2-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*, q_{n+1}-q_n=\frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}.}$$

(c) • Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
q_{2(n+1)}-q_{2n} &= q_{2n+2}-q_{2n+1}+q_{2n+1}-q_{2n}\\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}}+\frac{(-1)^{2n+1}}{F_{2n}F_{2n+1}}\\
&= \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}-\frac{1}{F_{2n}F_{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}-\dfrac{1}{F_{2n}F_{2n+1}}=\dfrac{F_{2n}-F_{2n+2}}{F_{2n}F_{2n+1}F_{2n+2}}=-\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}F_{2n+1}F_{2n+2}}=-\dfrac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}<0$ car pour tout $n\in\mathbb{N}^*, F_n>0$.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, q_{2(n+1)}-q_{2n}<0$ donc la suite $(q_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
• De même, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
q_{2(n+1)+1}-q_{2n+1}=q_{2n+3}-q_{2n+2}+q_{2n+2}-q_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{F_{2n+2}F_{2n+3}}+\frac{(-1)^{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}}\\
&= -\frac{1}{F_{2n+2}F_{2n+3}}+\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}.
\end{aligned}$$

Or, $-\dfrac{1}{F_{2n+2}F_{2n+3}}+\dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+2}}=\dfrac{-F_{2n+1}+F_{2n+3}}{F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}}=\dfrac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}}=\dfrac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}>0$ car pour tout $n\in\mathbb{N}^*, F_n>0$.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}, q_{2(n+1)+1}-q_{2n+1}>0$ donc la suite $(q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
• Enfin, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n=\varphi$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} q_{2n+1}=\varphi$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} q_{2n+1}-q_{2n}=\varphi-\varphi=0.$$

On en conclut que $\boxed{\text{les suites } (q_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (q_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

(d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a d'après la question 2.(b),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n} q_{k+1}-q_k=q_{n+1}-q_1.$$

Or, $q_1=\dfrac{F_2}{F_1}=\dfrac{1}{1}=1$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{F_kF_{k+1}}=q_{n+1}-1.$

Or, on sait d'après la question 2.(a) que $\lim_{n\to+\infty} q_n = \varphi$ d'où $\lim_{n\to+\infty} q_{n+1} = \varphi$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}} = \varphi - 1.}$

(e) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n = v_n$.

• **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $q_1 = v_1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $q_n = v_n$ et montrons que $q_{n+1} = v_{n+1}$.
Par défintion de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$q_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{q_n}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $q_n = v_n$ donc $F_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n} = v_{n+1}$ par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on a bien montré que $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^*, q_n = v_n.}$

3. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n \leqslant \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1 \Leftrightarrow \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_n \leqslant \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|F_n - \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|-\dfrac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

Puisque $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]0, 1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \leqslant 1$ d'où

$$\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, \left|F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

car $\sqrt{5} > 2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{2} < F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, ce qui implique que $-\dfrac{1}{2} < F_n - \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{1}{2}$ d'où $F_n \leqslant \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2} < F_n + 1$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, F_n = \left\lfloor \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 1.(a), on a

$$\varphi F_n + \varphi'^n = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n) + \varphi'^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + (\sqrt{5} - \varphi)\varphi'^n).$$

Or, $\sqrt{5} - \varphi = \sqrt{5} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\varphi'$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + (\sqrt{5} - \varphi)\varphi'^n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = \varphi F_n + \varphi'^n.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\varphi F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi\varphi'^{n+1} + \varphi^n - \varphi'^n).$$

Or, on sait que $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$ donc

$$\begin{aligned} \varphi F_{n+1} + F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2\varphi^n + (-1)^{n+2}\frac{\varphi}{\varphi^{n+1}} + \varphi^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{\varphi^n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((\varphi+1)\varphi^n + \varphi^n + (-1)^n(\frac{1}{\varphi^n} - \frac{1}{\varphi^n})) \\ &= \frac{\varphi^n(\varphi+2)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\varphi+2}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ donc $\dfrac{\varphi^n(\varphi+2)}{\sqrt{5}} = \varphi^{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \varphi F_{n+1} + F_n = \varphi^{n+1}.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a

$$\varphi F_{2n-1} - F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{2n} - \varphi\varphi'^{2n-1} - \varphi^{2n} + \varphi'^{2n}) = \frac{\varphi'^{2n-1}(\varphi' - \varphi)}{\sqrt{5}}.$$

Or, $\varphi' - \varphi = -\sqrt{5}$ donc $\varphi F_{2n-1} - F_{2n} = -\varphi'^{2n-1}$.
Puisque $\varphi' \in]-1, 0, [$, alors $\varphi'^{2n-1} \in]-1, 0[$ donc $-\varphi'^{2n-1} \in]0, 1[$ d'où

$$0 < \varphi F_{2n-1} - F_{2n} < 1 \Leftrightarrow F_{2n} < \varphi F_{2n-1} < F_{2n} + 1.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n} \in \mathbb{N}$, ceci implique que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, F_{2n} = \lfloor \varphi F_{2n-1} \rfloor.}$

- On a de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \varphi F_{2n} - F_{2n+1} = -\varphi'^{2n}$.
Puisque $\varphi' \in]-1, 0, [$, alors $\varphi'^{2n} \in]0, 1[$ donc $-\varphi'^{2n-1} \in]-1, 0[$ d'où

$$-1 < \varphi F_{2n} - F_{2n+1} < 0 \Leftrightarrow F_{2n+1} - 1 < \varphi F_{2n} < F_{2n+1}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n+1} \in \mathbb{N}$, ceci implique que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, F_{2n+1} - 1 = \lfloor \varphi F_{2n} \rfloor.}$

(d) Soit $n \geqslant 2$. D'après la question 4.(a), on a

$$\varphi F_n - \varphi' - F_{n+1} = -\varphi' - \varphi'^n = -\varphi'(1 + \varphi'^{n-1}).$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $n-1 \geqslant 1$ donc $\varphi'^{n-1} \in]-1, 1[$ d'où $1+\varphi'^{n-1} \in]0, 2[$ et finalement $-\varphi'(1 + \varphi'^{n-1}) > 0$ (car $-\varphi' > 0$).
D'autre part, puisque $\varphi' \in]-1, 0[$, la suite $(|\varphi'|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement vers 0 donc pour tout $n \geqslant 2, \varphi'^n \leqslant |\varphi'|^n < |\varphi'| = -\varphi'$ et $\varphi' < -\varphi'$ donc pour tout $n \geqslant 1, \varphi'^n < -\varphi'$ d'où pour tout $n \geqslant 2, 1 + \varphi'^{n-1} < 1 - \varphi'$, ce qui implique que $-\varphi'(1 + \varphi'^{n-1}) < -\varphi' + \varphi'^2 = 1$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2, 0 < \varphi F_n - \varphi' - F_{n+1} < 1$, i.e. $F_{n+1} < \varphi F_n - \varphi' < F_{n+1} + 1$.
On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, F_{n+1} = \lfloor \varphi F_n - \varphi' \rfloor.}$

(e) Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, on a

$$x_{n+1} = F_{n+1} + 1 = \lfloor \varphi F_n - \varphi' \rfloor + 1 = \lfloor \varphi F_n - \varphi' + 1 \rfloor = \lfloor \varphi F_n + \varphi \rfloor = \lfloor \varphi(F_n + 1) \rfloor$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, x_{n+1} = \lfloor \varphi x_n \rfloor.}$