
Programme de colles 17

Semaine du 26/02

Questions de cours

Matrices

1. Le résultat du produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
2. Le résultat du produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. stricte) est une matrice triangulaire supérieure (resp. stricte). Coefficients diagonaux à préciser.
3. Associativité du produit matriciel.
4. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
5. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.
6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice symétrique S et une unique matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$.
7. Unicité de l'inverse.
8. Pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
9. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) A est inversible ;
 - (b) Pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
 - (c) $\text{rg}(A) = n$.

Exercices

Matrices

Calcul de produits de matrices, de puissances de matrices. Utilisation de la formule du binôme de Newton pour des matrices commutatives.

Inversion de matrices en utilisant la méthode miroir ou en résolvant un système linéaire ou détermination de l'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur.