

Corrigé de la liste d'exercices n°11

Systèmes linéaires

Exercice 1

$$1. \begin{cases} x - 2y - 2z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = -1 \\ 2z - t = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x - y + z + 2t = -1 \\ 2y - 2z + t = 1 \\ 2z - t = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y - z - 2t - 1 = -\frac{5}{2}t - \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{t}{2} + 1 \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y, z, t) = \left(-\frac{5}{2}t - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{t}{2} + 1, t\right), t \in \mathbb{R}\}.$$

$$2. \begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ 2x + y + z - 2t = -3 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ -3y + 3z - 4t = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y + z - t + 3 \\ y = z - \frac{4}{3}t + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z + \frac{5}{3}t - 3 \\ y = z - \frac{4}{3}t + 3 \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y, z, t) = \left(-z + \frac{5}{3}t - 3, z - \frac{4}{3}t + 3, z, t\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$$3. \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1, L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le système admet donc pour unique solution $(x, y) = (1, 0)$.

$$4. \begin{cases} y + z + t = -1 \\ x + z + t = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + t = -1 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + t = -1 \\ y - z = 1 \\ y - t = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + t = -1 \\ -2z - t = 2 \\ -z - 2t = 3 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + t = -1 \\ -2z - t = 2 \\ -3t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Le système admet donc pour unique solution $(x, y, z, t) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

$$5. \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & z = 1 \\ & y & + z = 0 \\ x & + & y = 12 \\ x & + & 3y = 0 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & z = 1 \\ & y & + z = 0 \\ & y & - z = 11 \\ 3y & - & z = -1 \end{array} \right.$$

$$\xLeftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & z = 1 \\ & y & + z = 0 \\ & & - 2z = 11 \\ & & - 4z = -1 \end{array} \right.$$

donc $z = -\frac{11}{2} = \frac{1}{4}$, ce qui est absurde. On en conclut que le système est incompatible.

$$6. \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & y + z - 3t = 1 \\ -3x & + & y + z + t = -1 \\ x & - & 3y + z + t = -1 \\ x & + & y - 3z + t = 1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & y + z - 3t = 1 \\ & 4y & + 4z - 8t = 2 \\ - & 4y & + 4t = -2 \\ & & - 4z + 4t = 0 \end{array} \right.$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & y + z - 3t = 1 \\ & 4y & + 4z - 8t = 2 \\ & & 4z - 4t = 0 \\ & & - 4z + 4t = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcl} x & & = t + \frac{1}{2} \\ & y & = t + \frac{1}{2} \\ & & z = t \\ & & 0 = 0 \end{array} \right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y, z, t) = \left(t + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}, t, t\right), t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2

1.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} kx & + & y = 1 \\ x & + & ky = 1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2] \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & ky = 1 \\ kx & + & y = 1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - kL_1] \left\{ \begin{array}{rcl} x & + & ky = 1 \\ & (1 - k^2)y & = 1 - k \end{array} \right.$$

• Si $k = 1$, le système devient équivalent à $x + y = 1$ donc le système admet une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y) = (x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}.$$

• Si $k = -1$, la deuxième ligne du système devient $0 = 2$ donc le système est incompatible.

• Si $k \notin \{-1, 1\}$, alors $1 - k^2 \neq 0$ et on trouve $y = \frac{1 - k}{1 - k^2} = \frac{1}{1 + k}$ puis $x = 1 - ky = 1 - \frac{k}{1 + k} = \frac{1}{1 + k}$.

Dans ce cas, le système admet pour unique solution $(x, y) = (\frac{1}{1+k}, \frac{1}{1+k})$.

$$2. \left\{ \begin{array}{rcl} kx & + & (k^2 - k)y = k \\ (k + 1)x & - & ky = 5k + 3 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2] \left\{ \begin{array}{rcl} -x & + & k^2y = -4k - 3 \\ (k + 1)x & - & ky = 5k + 3 \end{array} \right.$$

$$\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + (k+1)L_1] \left\{ \begin{array}{rcl} -x & + & k^2y = -4k - 3 \\ & (k^3 + k^2 - k)y & = -4k^2 - 2k \end{array} \right.$$

On a $k^3 + k^2 - k = k(k^2 + k - 1) = k(k - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(k - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$

• Si $k = 0$, la deuxième ligne devient $0 = 0$ et le système équivaut à $x = 3$ donc il admet une infinité de solutions que sont $\{(x, y) = (3, y), y \in \mathbb{R}\}$.

- Si $k \in \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$, le système est incompatible car la deuxième ligne donne $0 \neq 0$ (en effet, le second membre $-4k^2 - 2k$ s'annule pour $k = 0$ ou $k = -\frac{1}{2}$).
- Si $k \notin \{0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$, on obtient $y = \frac{-4k^2 - 2k}{k^3 + k^2 - k} = \frac{4k + 2}{1 - k - k^2}$ puis

$$x = k^2 y + 4k + 3 = \frac{4k^3 + 2k^2 + (4k + 3)(1 - k - k^2)}{1 - k - k^2} = \frac{-5k^2 + k + 3}{1 - k - k^2},$$

ce qui fournit une unique solution au système.

$$3. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + y + 2z = k \\ x + 2y + 2z = -3 \end{array} \right. \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -3y + 5z = 13 \\ y + 3z = 2k - 3 \\ 3y + 3z = -9 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -3y + 5z = 13 \\ 14z = 6k + 4 \\ 8z = 4 \end{array} \right. \xrightarrow[L_4 \leftarrow 7L_4 - 4L_3]{L_4 \leftarrow 7L_4 - 4L_3} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -3y + 5z = 13 \\ 14z = 6k + 4 \\ 0 = -24k + 12 \end{array} \right.$$

- Si $k \neq \frac{1}{2}$, le système est incompatible.
- Si $k = \frac{1}{2}$, le système est compatible et on trouve pour unique solution

$$(x, y, z) = \left(3, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 3

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{array} \right. \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3a \\ y + z = 6a + b \\ -y - z = -3a + c \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left\{ \begin{array}{l} x - 3z = -9a - 2b \\ y + z = 6a + b \\ 0 = 3a + b + c \end{array} \right.$$

La dernière ligne montre que le système est compatible si et seulement si $3a + b + c = 0$ et dans ce cas, on a $y = -z + 6a + b$ et $x = 3z - 9a - 2b$.

Ainsi, dans le cas où le système est compatible, il y a une infinité de solutions que sont

$$\{(x, y, z) = (3z - 9a - 2b, -z + 6a + b, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = a \\ 2x + 13y - 7z = b \\ x - y + z = c \end{array} \right. \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = a \\ 12y - 8z = -a + b \\ -3y + z = -a + 2c \end{array} \right. \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3} \left\{ \begin{array}{l} 24x = -12a + 4b + 40c \\ 12y - 8z = 9a - b - 16c \\ -4z = -5a + b + 8c \end{array} \right.$$

On constate que le système est compatible pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et l'unique solution du système est

$$(x, y, z) = \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{5c}{3}, \frac{3a}{4} - \frac{b}{12} - \frac{4c}{3}, \frac{5a}{4} - \frac{b}{4} - 2c\right).$$

3.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & + & y + 4z - t = a \\ & y & + z + 2t = b \\ & y & - 2z + t = c \\ & & 2t = d \end{array} \right. \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & + & y + z + 2t = b \\ & & 4z - t = a \\ & y & - 2z + t = c \\ & & 2t = d \end{array} \right. \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \\
 & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & + & y + z + 2t = b \\ & y & - 2z + t = c \\ & & 4z - t = a \\ & & 2t = d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & + & y + z = b - d \\ & y & - 2z = c - \frac{d}{2} \\ & & 4z = a + \frac{d}{2} \\ & & t = \frac{d}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & + & y = b - d - \frac{a}{4} - \frac{d}{8} \\ & y & = c - \frac{d}{2} + \frac{a}{2} + \frac{d}{4} \\ & & z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ & & t = \frac{d}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & + & y = -\frac{a}{4} + b - \frac{9d}{8} - \frac{a}{2} - c + \frac{d}{4} \\ & y & = \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4} + \frac{d}{8} \\ & & z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ & & t = \frac{d}{2} \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & & = -\frac{3a}{4} + b - c - \frac{7d}{8} \\ & y & = \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4} + \frac{d}{8} \\ & & z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ & & t = \frac{d}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & & = -\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{3} - \frac{7d}{24} \\ & y & = \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4} + \frac{d}{8} \\ & & z = \frac{a}{4} + \frac{d}{8} \\ & & t = \frac{d}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le système est compatible pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et l'unique solution du système est

$$\boxed{(x, y, z, t) = \left(-\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{3} - \frac{7d}{24}, \frac{a}{2} + c - \frac{d}{4}, \frac{a}{4} + \frac{d}{8}, \frac{d}{2} \right)}.$$

Exercice 4

Supposons dans un premier temps que $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et posons $X = \ln(x), Y = \ln(y), Z = \ln(z)$. En appliquant le logarithme à chaque ligne du système, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{rcl} X & + & 2Y + Z = \ln(2) \\ -X & + & Y = 0 \\ X & - & 2Y + Z = \ln(8) \end{array} \right. \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{rcl} X & + & 2Y + Z = \ln(2) \\ & & 3Y + Z = \ln(2) \\ & - & 4Y = 2\ln(2) \end{array} \right. \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X & & = -\frac{1}{2}\ln(2) \\ & Y & = -\frac{1}{2}\ln(2) \\ & Z & = \frac{5}{2}\ln(2) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

donc $(x, y, z) = (2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{\frac{5}{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$.

Cherchons maintenant les solutions dans $\mathbb{R}^3$. Si (x, y, z) est solution du système, alors nécessairement x, y et z sont tous trois non nuls.

Par ailleurs, puisque $\frac{y}{x} = 1 > 0$, on en déduit que x et y sont de même signe. Par ailleurs, $xz = 8y^2 > 0$ donc x et z sont également de même signe.

On en déduit que x, y et z sont tous trois strictement positifs, ou tous trois strictement négatifs.

On a déjà résolu le système sous l'hypothèse où ils sont strictement positifs.

Supposons que x, y et z sont strictement négatifs et sont solutions du système. On remarque aisément que $(-x, -y, -z)$ est alors une solution du système avec $-x, -y$ et $-z$ strictement positifs donc $(-x, -y, -z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$ d'où $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -4\sqrt{2})$.

Finalement, le système admet deux solutions : $(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2})$ ou $(x, y, z) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -4\sqrt{2})$.