Lycée Fénelon
Année 2023-2024 | BCPST1
A. Panetta

Devoir maison n°9
A rendre pour le Mercredi 28 Février 2024

Problème

Dans tout le problème, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

Le but de cette partie est d'exprimer A^n pour tout entier naturel n.

1. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \lambda X$.
2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
   (a) $AX = X$.
   (b) $AX = -X$.
   (c) $AX = 2X$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. On appelle D la matrice diagonale obtenue.
   (c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel $n, P^{-1}A^nP = D^n$.
   (e) En déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n.

Partie II : Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 = -6, u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.
3. Donner l'expression de u_n pour tout entier naturel n.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III : Diagonalisation simultanée

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On reprend la matrice P introduite dans la partie I.

1. Calculer $P^{-1}BP$. On appelle D' la matrice diagonale obtenue.
2. Calculer $(A+B)^n$ pour tout entier naturel n.