BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir maison n°9

Problème

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $AX = \lambda X$ admette une solution non nulle. Cette équation équivaut à $(A - \lambda I_3)X = 0$. Or, pour tout réel λ, cette équation admet la solution nulle et celle-ci est unique si et seulement si $A - \lambda I_3$ est inversible.

   On cherche donc à déterminer les réels λ pour lesquels $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire les réels λ pour lesquels $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Echelonnons la matrice $A - \lambda I_3$.

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & -\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_3 + (2-\lambda)L_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 & -\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

   Or, $(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$ donc on a les équivalences

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -1, 2\}.$$

$$\boxed{\text{Les réels cherchés sont donc } 1, -1, \text{ et } 2.}$$

2. (a) On a les équivalences suivantes :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & y \\ -2x + y + 2z & = & z \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{donc } \boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$$

   (b) On a les équivalences suivantes :

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & -y \\ -2x + y + 2z & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$$

(c) On a les équivalences suivantes :

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x \\ z & = & 2y \\ -2x+y+2z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2x \\ z & = & 4x \end{array} \right.$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } AX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$

3. (a) Echelonnons P en utilisant la méthode du pivot de Gauss afin de déterminer l'inverse de P si P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

On voit dès la deuxième étape que P est de rang 3, donc P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.}$

(c) Puisque D est une matrice diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = D^n$.

• Pour $n = 0$, on a $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3 = D^0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P^{-1}A^nP = D^n$. D'après la question 2.(b), $P^{-1}AP = D$ donc

$$D^{n+1} = D^nD = (P^{-1}A^nP)P^{-1}AP = P^{-1}A^n(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nI_3AP = P^{-1}A^{n+1}P,$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = D^n.}$

(e) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^nP = D^n$ d'où en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^n \\ 1 & (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 2^{n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2((-1)^n - 2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2((-1)^{n+1} - 2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2} \\ 6+2((-1)^n - 2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3} \end{pmatrix}}$.

Partie II : Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, AX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.

• Pour $n = 0$, on a $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $X_n = A^nX_0$. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0,$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$.

On a donc bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0.}$

3. On a $X_0=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$.

   D'après la question précédente et le résultat de la première partie, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$

   $$\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6+2((-1)^n-2^n) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+1}\\ 6+2((-1)^{n+1}-2^{n+1}) & 3(1+(-1)^n) & -3+(-1)^{n+1}+2^{n+2}\\ 6+2((-1)^n-2^{n+2}) & 3(1+(-1)^{n+1}) & -3+(-1)^n+2^{n+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

   d'où, en considérant la première ligne de la matrice obtenue,

   $$\boxed{\text{pour tout}\, n\in\mathbb{N}, u_n=-6+2(2^n+(-1)^{n+1}).}$$

4. On a pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant -6+2(2^n-1)=2^{n+1}-8$.

   Or, puisque $2>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n+1}-8=+\infty$.

   Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty.}$

Partie III : Diagonalisation simultanée

1. On a

   $$\begin{aligned}P^{-1}BP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&1&1\\-2&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&-6&2\\-4&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&12&0\\0&0&12\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   donc $\boxed{P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=D'.}$

2. D'après la question précédente, $B=PD'P^{-1}$ donc on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$(A+B)^n=(PDP^{-1}+PD'P^{-1})^n=(P(D+D')P^{-1})^n=P(D+D')^nP^{-1}$$

   car $D+D'$ est diagonale.

   Or, $D+D'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N},(D+D')^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$ d'où pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned}(A+B)^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&4^n\\1&-1&2^{2n+1}\\1&1&2^{2n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}8-2^{2n+1}&0&2^{2n+1}-2\\4-2^{2n+2}&6&2^{2n+2}-4\\8-2^{2n+3}&0&2^{2n+3}-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (A+B)^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8-2^{2n+1} & 0 & 2^{2n+1}-2 \\ 4-2^{2n+2} & 6 & 2^{2n+2}-4 \\ 8-2^{2n+3} & 0 & 2^{2n+3}-2 \end{pmatrix}.}$$