Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Programme de colles 18 **Semaine du 04/03**

Questions de cours

Matrices

1. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice symétrique S et une unique matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$.
3. Unicité de l'inverse.
4. Pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

   La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas,
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) A est inversible ;
   (b) Pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
   (c) $\mathrm{rg}(A) = n$.

Probabilités

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.
3. Formule des probabilités composées.
4. Formule des probabilités totales.
5. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exercices

Matrices

Calcul de produits de matrices, de puissances de matrices. Utilisation de la formule du binôme de Newton pour des matrices commutatives.
Inversion de matrices en utilisant la méthode miroir ou en résolvant un système linéaire ou détermination de l'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur.

Probabilités

Exercices simples sur des univers finis, utilisation de la formule des probabilités totales, indépendance d'événements,...