Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°5
Samedi 27 janvier 2024 (3h30)

Problème 1 : Matrices productives

Partie I : Résultats théoriques

1. (a) Supposons que $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$. Tout d'abord, notons que $BX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a
$$(BX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} X_{k,1}.$$
Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!], B_{i,k} \geqslant 0$ et $X_{k,1} \geqslant 0$ puisque $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$.
Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!], (BX)_{i,1} \geqslant 0$ car c'est une somme de termes positifs, ce qui prouve que $\boxed{BX \geqslant 0.}$

   (b) Supposons que pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, on a $BX \geqslant 0$. Montrons que $B \geqslant 0$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$
Soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice colonne constituée d'un 1 en ligne j et de 0 ailleurs, i.e. pour tout $i \in [\![1, n]\!] X_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
La matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est positive, donc par hypothèse, on a $BX \geqslant 0$, i.e. pour tout $i \in [\![1, n]\!], (BX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} \underbrace{X_{k,1}}_{=\delta_{j,k}} = B_{i,j} X_{j,1} = B_{i,j} \geqslant 0.$
Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, B_{i,j} \geqslant 0$ donc $\boxed{B \geqslant 0.}$

2. Par hypothèse, on sait que P est positive et que $P > AP$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $P_{i,1} > (AP)_{i,1}$.

D'après la question 1.a), puisque A est positive et P est positive, alors AP est positive donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], (AP)_{i,1} \geqslant 0$, ce qui implique que $P_{i,1} > 0$ d'où $\boxed{P > 0.}$

3. (a) Par hypothèse, $X \geqslant AX$ donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant (AX)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

En particulier, pour $i = k$, on trouve $x_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$.

Puisque $x_k = cp_k$, on en déduit que $cp_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$. Ainsi

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) = cp_k - \sum_{j=1}^{n} ca_{k,j} p_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j - \sum_{j=1}^{n} ca_{k,j} p_j = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j - ca_{k,j} p_j$$

d'où

$$\boxed{c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j).}$$

(b) Puisque $P > AP$, on a $p_k > (AP)_{k,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$ donc $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j > 0$. On peut donc diviser par $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$ et d'après la question précédente, on obtient

$$c \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j)}{p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j}.$$

On vient de dire que le dénominateur est positif. Montrons que le numérateur l'est également.
Par définition, $c = \min\{\frac{x_j}{p_j}, j \in [\![1, n]\!]\}$ donc pour tout $j \in [\![1, n]\!], c \leqslant \frac{x_j}{p_j}$. Or, $P > 0$ donc en multipliant par p_j, on obtient que pour tout $j \in [\![1, n]\!], cp_j \leqslant x_j$, i.e. $x_j - cp_j \geqslant 0$.
D'autre part, A est positive donc pour tout $j \in [\![1, n]\!], a_{k,j} \geqslant 0$.

Ainsi, $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j) \geqslant 0$ car c'est une somme à termes positifs.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{c \geqslant 0.}$
Comme dit précédemment, on a alors pour tout $j \in [\![1, n]\!], x_j \geqslant cp_j$ avec $c \geqslant 0$ et $p_j > 0$ car $P > 0$ donc pour tout $j \in [\![1, n]\!], x_j \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{X \text{ est positive.}}$

(c) Supposons que $X = AX$. On a alors $-X = -AX = A(-X)$ d'où $-X - A(-X) = 0$ et en particulier $-X - A(-X) \geqslant 0$, i.e. $-X \geqslant A(-X)$.
En raisonnant comme dans les questions précédentes, on en déduit que $-X \geqslant 0$, d'où $X \leqslant 0$.
D'après la question précédente, on a à la fois $X \geqslant 0$ et $X \leqslant 0$, i.e. pour tout $j \in [\![1, n]\!], x_j \geqslant 0$ et $x_j \leqslant 0$ donc $x_j = 0$, ce qui assure que $\boxed{X = 0.}$
Ainsi, l'équation $X = AX$, équivalente à $(I_n - A)X = 0$, admet pour unique solution $X = 0$, ce qui assure que $\boxed{(I_n - A) \text{ est inversible.}}$

4. (a) On a $X = (I_n - A)Y = Y - AY$. Puisque $X \geqslant 0$, en en déduit que $Y - AY \geqslant 0$, i.e. $Y \geqslant AY$. D'après la question 3.b), ceci implique que $\boxed{Y \geqslant 0.}$
   Ainsi, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, on a $(I_n - A^{-1})X \geqslant 0$ donc d'après la question 1.b), $\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$

   (b) Tout d'abord, puisque $(I_n - B)^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors
   $$V = (I_n - B)^{-1}U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$
   De plus, puisque $(I_n - B)^{-1}$ et U sont positives, on en déduit que V est positive d'après la question 1.a).
   D'après l'énoncé, on a $U > 0$. Ainsi, $V - BV = (I_n - B)V = U > 0$ donc $\boxed{V > BV.}$
   Autrement dit, B est une matrice carrée positive telle qu'il existe une matrice colonne V positive vérifiant $V > BV$, i.e. $\boxed{B \text{ est productive.}}$

5. • Si A est productive, on a par définition $A \geqslant 0$ et on montré en question 3.c, que $(I_n - A)$ était inversible puis en question 4.a que $(I_n - A)^{-1}$ était positive.
   • Réciproquement, si on suppose $A \geqslant 0, I_n - A$ inversible et $(I_n - A)^{-1}$ positive, on a montré en question 4.b que A était productive.
   On a donc bien l'équivalence voulue.

6. Soit A une matrice productive. On a $A \geqslant 0$ donc $A^T \geqslant 0$ également (en effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (A^T)_{i,j} = a_{j,i} \geqslant 0$).
   Par ailleurs, puisque A est productive, on sait d'après la question précédente que $I_n - A$ est inversible donc $(I_n - A)^T = I_n^T - A^T = I_n - A^T$ l'est également et son inverse est
   $$(I_n - A^T)^{-1} = ((I_n - A)^T)^{-1} = ((I_n - A)^{-1})^T.$$
   Puisque A est productive, $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$ donc $((I_n - A)^{-1})^T \geqslant 0$, i.e. $(I_n - A^T)^{-1} \geqslant 0$.
   Finalement $A^T \geqslant 0, I_n - A^T$ est inversible et $(I_n - A^T)^{-1} \geqslant 0$.
   D'après la question précédente, ceci assure que $\boxed{A^T \text{ est productive.}}$

7. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(R)$ une matrice positive et nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^p = 0$.
   Montrons que $I_n - A$ est inversible. En effet, on a
   $$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - A^{k+1} = A^0 - A^p = I_n - A^p = I_n$$
   donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
   Or, puisque A est positive, il est clair que toutes les puissances de A sont également à cœfficients positifs, donc $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{A \text{ est productive.}}$

Partie II : Exemples de matrices productives

1. • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait d'après la partie précédente que λI_n est productive si et seulement si $\lambda I_n \geqslant 0, I_n - \lambda I_n$ est inversible et $(I_n - \lambda I_n)^{-1}$ est positive.
   Tout d'abord, $\lambda I_n \geqslant 0$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.
   Ensuite, $I_n - \lambda I_n = (1 - \lambda)I_n$ est inversible si et seulement si $1 - \lambda \neq 0$, i.e. $\lambda \neq 1$ et dans ce cas, $(I_n - \lambda I_n)^{-1} = ((1 - \lambda)I_n)^{-1} = \dfrac{1}{1 - \lambda}I_n$ est positive si et seulement si $1 - \lambda > 0$, i.e. $\lambda < 1$.

Finalement $\boxed{\lambda I_n \text{ est productive si et seulement si } 0 \leqslant \lambda < 1.}$

• On a $D \geqslant 0$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!], d_i \geqslant 0$.

Ensuite, $I_n - D = \begin{pmatrix} 1-d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1-d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!], 1-d_i \neq 0$, i.e. $d_i \neq 1$ et dans ce cas, $(I_n-D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{1-d_n} \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!], 1-d_i > 0$, i.e. $d_i < 1$.

Finalement $\boxed{D \text{ est productive si et seulement si pour tout } i \in [\![1,n]\!], 0 \leqslant d_i < 1.}$

2. Tout d'abord, puisque $a \geqslant 0$, on a bien $A \geqslant 0$. Ensuite, $A^2 = 0$ donc A est une matrice positive et nilpotente. D'après la question 7 de la partie I, $\boxed{A \text{ est productive.}}$

   D'après la question 4.b de la partie I, si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $P = (I_n - A)^{-1}U$ vérifie $P > AP$.

   On a $I_n - A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(I_n - A) = 1 \neq 0$ donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $(I_n - A)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix} = P.}$

   On vérifie qu'on a bien $AP = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix} = P$.

3. Tout d'abord, on a bien $B \geqslant 0$. Inversons $I_n - B$.

   On a $I_n - B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow 4L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)$ donc $I_n - B$ est inversible d'inverse $(I_n - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{B \text{ est productive.}}$

   Posons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(I_n - B)^{-1}V = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = Q}$.

   On a alors bien $BQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = Q$.

4. On a $I_n - C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible car elle comporte une ligne de 0 donc $\boxed{C \text{ n'est pas productive.}}$

Problème 2 : Etude d'une marche aléatoire

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $MX = \lambda X$ admette une solution non nulle. Cette équation équivaut à $(M - \lambda I_3)X = 0$. Or, pour tout réel λ, cette équation admet la solution nulle et celle-ci est unique si et seulement si $M - \lambda I_3$ est inversible.
   On cherche donc à déterminer les réels λ pour lesquels $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire les réels λ pour lesquels $\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) < 3$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Echelonnons la matrice $M - \lambda I_3$. On a
   $$M-\lambda I_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 2-4\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (4\lambda-2)L_1}}{\longrightarrow}$$
   $$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & 4\lambda-1 \\ 0 & 4\lambda-1 & -16\lambda^2+16\lambda-3 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-4\lambda \\ 0 & 1-4\lambda & 4\lambda-1 \\ 0 & 0 & -16\lambda^2+20\lambda-4 \end{pmatrix}.$$
   Observons que $-16\lambda^2 + 20\lambda - 4 = -4(4\lambda^2 - 5\lambda + 1) = -4(\lambda - 1)(4\lambda - 1)$ donc les racines de ce trinôme du second degré sont 1 et $\frac{1}{4}$.
   - Si $\lambda = \dfrac{1}{4}$, on obtient $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(M - \frac{1}{4}I_3) = 1 < 3$.
   - Si $\lambda = 1$, on obtient $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(M - I_3) = 2 < 3$.
   - Si $\lambda \notin \{\frac{1}{4}, 1\}$, on a $1 - 4\lambda \neq 0$ et $-16\lambda^2 + 20\lambda - 4 \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) = 3$.

   $\boxed{\text{Les deux réels cherchés sont donc } \frac{1}{4} \text{ et } 1.}$

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
MX = X \quad &\Leftrightarrow \quad 4M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y + z = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ x + y + 2z = 4z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } MX = X \text{ est } \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}. \right\}}$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} MX = \frac{1}{4}X & \Leftrightarrow 4M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & x \\ x+2y+z & = & y \\ x+y+2z & = & z \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow x+y+z=0 \\ & \Leftrightarrow z=-x-y. \end{aligned}$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } MX = \frac{1}{4}X \text{ est } \left\{ X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x,y)\in\mathbb{R}^2. \right\}}$

3. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculons P^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3}]{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

   On obtient $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$.

4. On a

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = D.} \end{aligned}$$

5. On a $P^{-1}MP = D$ donc $M = PDP^{-1}$. Par une récurrence immédiate, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{4^n}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n & 1 & 0 \\ 4^n & 0 & 1 \\ 4^n & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

Partie II : Calcul des probabilités

1. D'après l'énoncé, on a $p_0 = 1$, $q_0 = r_0 = 0$, $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $q_1 = r_1 = \dfrac{1}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n), on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(A_{n+1}) &=& \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) &=& \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) &=& \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{n+1} &=& \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} &=& \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} &=& \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{array}\right.$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\boxed{V_{n+1} = MV_n.}$$

3. On en déduit par une récurrence immédiate que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, V_n = M^nV_0.}$
Ainsi, on a pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

avec $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
Ainsi, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{p_n = \frac{4^n+2}{3\times 4^n}, q_n = r_n = \frac{4^n-1}{3\times 4^n}.}$$

4. On a $4^n + 2 = 4^n\left(1+\frac{2}{4^n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{4^n} = 1$ donc $4^n + 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n$. On montre de même que $4^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n$.

   Ainsi, quand n tend vers $+\infty$, on a $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{3\times 4^n} = \dfrac{1}{3}$, $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{3\times 4^n} = \dfrac{1}{3}$ et $q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{3\times 4^n} = \dfrac{1}{3}$.
   On en déduit que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}.}$$
   Ceci signifie qu'après un très grand nombre d'étapes, le pion a autant de chances d'être en A, en B ou en C.

Partie III : Nombre moyen de passages en A

1. La variable aléatoire $X_1+\cdots+X_n$ compte le nombre de passages en A lors des n premières étapes et le nombre $\mathbb{E}(X_1+\ldots X_n)$ est le nombre moyen de passages en A lors des n premières étapes, c'est à dire est égal à a_n.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors
$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(A_n) = p_n = \frac{4^n+2}{3\times 4^n}.}$$
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $a_n = \mathbb{E}(X_1+\ldots X_n)$. Par linéarité de l'espérance, on obtient
$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{4^k+2}{3\times 4^k}\\ &= \frac{n}{3}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}\\ &= \frac{n}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \boxed{\frac{n}{3}+\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).} \end{aligned}$$
   On a $a_n = \dfrac{n}{3}\left(1+\dfrac{2}{3n}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)\right)$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{3n}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right) = 1$ donc $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}.}$