Lycée Fénelon BCPST1

Année 2023-2024 — A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°5

Samedi 9 mars 2024 (3h30)

L'énoncé est constitué de deux problèmes et comporte 4 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Matrices productives

Partie I : Résultats théoriques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}$ l'ensemble ddes matrices à n lignes et p colonnes à cœfficients réels.
• Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$) signifie que tous les cœfficients de M sont positifs (respectivement strictement positifs).
On dit alors que M est **positive** (respectivement **strictement positive**).
• Pour toutes matrices $(M, N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

1. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$, alors on a $BX \geqslant 0$.
   (b) Etablir, réciproquement, que si, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, on a $BX \geqslant 0$, alors B est positive.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on dit qu'elle est **productive** si A est positive et s'il existe une matrice colonne $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive, telle que $P > AP$.

Dans les questions 2 à 4, on considère deux matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ vérifiant les conditions de cette définition.

2. Montrer que $P > 0$.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$.
   On pose $c = \min \left\{ \dfrac{x_j}{p_j}, j \in [\![1, n]\!]. \right\}$.
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   (a) Etablir que :
   $$c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j \right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j).$$
   (b) En déduire que $c \geqslant 0$ puis que X est positive.
   (c) On suppose que $X = AX$.
   En utilisant l'inégalité $-X \geqslant A(-X)$, montrer que $X = 0$ et en déduire que $(I_n - A)$ est inversible.
4. (a) Soit $X \geqslant 0$. Montrer que $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive. En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   (b) On considère dans cette question B une matrice carrée positive telle que $I_n - B$ soit inversible et d'inverse positive.
   Soit $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice colonne dont toutes les composantes valent 1.
   Montrer que $V > BV$. Conclure.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est productive ;
   (b) $A \geqslant 0, (I_n - A)$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

6. Montrer que si A est une matrice productive, alors sa transposée A^T est également une matrice productive.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice positive et nilpotente. Montrer que A est productive.
Indication : on pourra utiliser le fait que si $A \geqslant 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \geqslant 0$.

Partie II : Exemples de matrices productives

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur λ la matrice scalaire λI_n est-elle productive ?
Plus généralement, si $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, à quelle condition sur les $(d_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la matrice D est-elle productive ?
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est productive et trouver une matrice colonne $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $P > AP$.
3. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ est productive et trouver une matrice colonne $Q \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $Q > BQ$.
4. Justifier que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Problème 2 : Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement du pion respecte les deux règles suivantes :
• le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux étapes précédentes ;
• pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n »et C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n ».
On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie I : Calcul des puissances d'une matrice

1. Déterminer les deux réels λ pour lesquels il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $MX = \lambda X$.

2. Trouver toutes les matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que :
   (a) $MX = X$;
   (b) $MX = \frac{1}{4}X$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Calculer $P^{-1}MP$. On note D la matrice diagonale obtenue.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Calcul des probabilités

1. Calculer les nombres p_0, q_0, r_0, p_1, q_1 et r_1.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie III : Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ les variables aléatoires :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } A_k \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_k} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

1. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.