Corrigé de la liste d'exercices n°14 — Variables aléatoires

Exercice 1.

1. On a $(X=Y)=\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n}((X=k)\cap(Y=k))$ donc

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=k))=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)$$

par indépendance des variables alétoires X et Y.
Or, pour tout $k\in[\![1,n]\!],\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{1}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

2. On a $(X\geqslant Y)=\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n}((X=k)\cap(Y\leqslant k))$ donc

$$\mathbb{P}(X\geqslant Y)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}((X=k)\cap(Y\leqslant k))=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\leqslant k)$$

par indépendance de X et Y d'où $\mathbb{P}(X\geqslant Y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$.

3. La variable aléatoire $X-Y$ prend ses valeurs dans $[\![1-n,n-1]\!]$ et on a pour tout $k\in[\![1-n,n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X-Y=k) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}((Y=i)\cap(X=i+k))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(X=i+k)\quad \text{par indépendance de}\,X\,\text{et}\,Y\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i+k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n+k}\mathbb{P}(X=j).\end{aligned}$$

• Si $k\leqslant 0$, on obtient $\mathbb{P}(X-Y=k)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+k}\mathbb{P}(X=j)=\frac{n+k}{n^2}$.

• Si $k\geqslant 0$, on obtient $\mathbb{P}(X-Y=k)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n}\mathbb{P}(X=j)=\frac{n-k}{n^2}$.

Finalement, pour tout $k\in[\![1-n,n-1]\!],\mathbb{P}(X-Y=k)=\dfrac{n-|k|}{n^2}$.

Exercice 2.

1. Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$.
   On a $A_k \cap A_{k+1} = (X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) \cup (X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1)$.
   Ces deux événements étant incompatibles, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) &= \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_k = 0)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)\mathbb{P}(X_{k+2} = 0) + \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 0)\mathbb{P}(X_{k+2} = 1) \text{ (indépen} \\
&= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\
&= p(1-p).
\end{aligned}$$

2. Si les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux indépendants, alors nécessairement, pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1})$.
   Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_k = 0, X_{k+1} = 1) + \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 0) = 2p(1-p)$.
   On a donc $\mathbb{P}(A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}) \Leftrightarrow p(1-p) = 4p^2(1-p)^2$.
   Puisque $p(1-p) \neq 0$, ceci équivaut à $4p(1-p) = 1$ d'où $p = \dfrac{1}{2}$.
   De plus, si $|i-j| > 1$, les événements $A_i = (X_i \neq X_{i+1})$ et $A_j = (X_j \neq X_{j+1})$ sont indépendants d'après le lemme des coalitions quelle que soit la valeur de p puisque les variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont indépendantes
   Ainsi, les événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux indépendants si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. On a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $Y(\Omega) = \left\{ \dfrac{1}{1+k}, k \in [\![0, n]\!] \right\}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{1+k}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}
\end{aligned}$$

- Si $p = 0$, on a $\mathbb{E}(Y) = 1$.
- Si $p \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right) \\
&= \frac{(p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)} \\
&= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. On a $T(\Omega) = [\![1,4]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, notons A_k l'événement :« Le rat choisit la bonne porte au k-ème essai ».
   On a $\mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{4}$.
   Ensuite, $\mathbb{P}(T=2) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$.
   De même, $\mathbb{P}(T=3) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$ et d'après la formule des probabilités composées, on obtient
   $$\mathbb{P}(T=3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(A_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   Enfin, puisque $\mathbb{P}(T=1) + \mathbb{P}(T=2) + \mathbb{P}(T=3) + \mathbb{P}(T=4) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(T=4) = \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi, T suit une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$.
2. On a $\mathbb{E}(T) = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$. Ainsi, le rat peut espérer sortir au bout de trois essais.

Exercice 5.

1. Puisque Y compte le nombre de cartes bien placées, on a $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k)$.
   Par définition de l'espérance, on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
   $$\mathbb{E}(Y_k) = 1 \times \mathbb{P}(Y_k = 1) + 0 \times \mathbb{P}(Y_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 1).$$
   Par définition, $\mathbb{P}(Y_k = 1)$ est la probabilité que la k-ème carte soit bien placée.
   Dénombrons les permutations qui laissent fixes la k-ème carte. Puisque la position de la k-ème carte est imposée, il reste à permuter les $n-1$ autres cartes, ce qui donne $(n-1)!$ permutations qui laissent fixes la k-ème carte.
   Puisqu'il y a $n!$ permutations de l'ensemble des n cartes, la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ donc
   $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Exercice 6. Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$.
Notons T_1 et T_2 les variables aléatoires égales aux numéros obtenus aux premier et deuxième tirage respectivement.
Les variables aléatoires T_1 et T_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et on a $M = \max(T_1, T_2)$.
La variable aléatoire M est définie sur Ω^2 et on a $M(\Omega^2) = \Omega$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a
$$(M=k) = ((T_1 = k) \cap (T_2 \leqslant k-1)) \cup ((T_1 \leqslant k-1) \cap (T_2 = k)) \cup ((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$
Puisque c'est une union d'événements deux à deux incompatibles, on obtient
$$\mathbb{P}(M=k) = \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 \leqslant k-1)) + \mathbb{P}((T_1 \leqslant k-1) \cap (T_2 = k)) + \mathbb{P}((T_1 = k) \cap (T_2 = k)).$$

Les tirages étant indépendants, les variables aléatoires T_1 et T_2 le sont également et on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k) &= \mathbb{P}(T_1=k)\mathbb{P}(T_2\leqslant k-1)+\mathbb{P}(T_1\leqslant k-1)\mathbb{P}(T_2=k)+\mathbb{P}(T_1=k)\mathbb{P}(T_2=k)\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{k-1}{n}+\frac{k-1}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{2k-1}{n^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(M)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(M=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-k}{n^2}=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

d'où

$$\mathbb{E}(M)=\frac{4n^3+6n^2+2n-3n^2-3n}{6n^2}=\frac{4n^2+3n-1}{6n}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Exercice 7.

1. Le choix des lapins consiste en $2n$ expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ donc M suit une loi binomiale de paramètres $(2n,\frac{1}{2})$.
   Par ailleurs, s'il y a M mâles, il y a $2n-M$ femelles et le nombre de couples qu'on peut former est le minimum entre le nombre de mâles et de femelles donc $C=\min(M,2n-M)$.
2. La variable aléatoire C est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
   Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a
   $$\mathbb{P}(C=k)=\mathbb{P}((M=k)\cup(2n-M=k))=\mathbb{P}((M=k)\cup(M=2n-k)).$$
   - Si $k\neq n$, alors les événements $(M=k)$ et $(M=2n-k)$ sont incompatibles donc
   $$\mathbb{P}(C=k)=\mathbb{P}(M=k)+\mathbb{P}(M=2n-k)=\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}+\binom{2n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n-1}}.$$
   - Si $k=n$, on obtient
   $$\mathbb{P}(C=n)=\mathbb{P}(M=n)=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$
3. D'après la formule de transfert, on a
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(C) &= \sum_{k=0}^{2n}\min(k,2n-k)\mathbb{P}(M=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\\ &= \frac{1}{2^{2n}}\left(2n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-1}{k-1}+\sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k)\binom{2n}{2n-k}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2n}}\left(2n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}2n\binom{2n-1}{2n-k-1}\right)\\ &= \frac{n}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n-1}{k}\right)\\ &= \frac{n}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}-\binom{2n-1}{n}\right)\\ &= \frac{n(2^{2n-1}-\binom{2n-1}{n})}{2^{2n-1}}.\end{aligned}$$

Exercice 8.

1. Tout d'abord, on remarque que S_n suit une loi binomiale de paramètres (n,p) puisque c'est une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p donc $\mathbb{E}(S_n) = np$.

   Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k X_{k+1})$. Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les variables aléatoires X_k et X_{k+1} sont indépendantes donc $\mathbb{E}(X_k X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Finalement, on a $\mathbb{E}(V_n) = (n-1)p^2$.
2. Puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a $V(S_n) = np(1-p)$.
   Calculons $V(V_n)$ en utilisant la formule de König-Huygens, c'est à dire

$$V(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2.$$

   On a $V_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2 + 2 \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i<j}} Y_i Y_j$.

   Par linéarité de l'espérance, il vient $\mathbb{E}(V_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2 \\ i<j}} \mathbb{E}(Y_i Y_j)$.

   Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathbb{E}(Y_k^2) = \mathbb{E}(X_k^2 X_{k+1}^2) = \mathbb{E}(X_k X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Par ailleurs, si $j > i+1$, on a $Y_i Y_j = X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}$ avec les variables aléatoires $X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1}$ qui sont mutuellement indépendantes donc

$$\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_{j+1}) = p^4.$$

   Enfin, si $j = i+1$, on a

$$\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1} X_{i+2}) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+2}) = p^3.$$

   Il y a $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ couples $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tels que $i < j$ et $n-2$ tels que $j = i+1$ donc $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) = \frac{n^2 - 3n + 2 - 2n + 4}{2} = \frac{n^2 - 5n + 6}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ tels que $j > i+1$.
   On trouve donc

$$\mathbb{E}(V_n^2) = (n-1)p^2 + 2(n-2)p^3 + (n-2)(n-3)p^4 = p^2((n-1) + 2(n-2)p + (n-2)(n-3)p^2)$$

   d'où finalement

$$V(V_n) = p^2((n-1) + 2(n-2)p + (n-2)(n-3)p^2) - (n-1)^2 p^4 = p^2((n-1) + 2(n-2)p + (5-3n)p^2).$$