

Intégration d'une fonction continue réelle sur un segment

Dans tout le chapitre, (a, b) est un couple de réels avec $a < b$. On calculera l'intégrale de fonctions continues définies sur un segment $[a, b]$.

17.1 Intégrale

17.1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Définition 1: Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.

On appelle intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$ l'aire sous la courbe de f , c'est à dire l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe de f , la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

L'intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$ se note

$$\int_a^b f(t)dt.$$

On définit également $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 1. • L'élément infinitésimal dt précise par rapport à quelle variable on intègre et est indispensable, notamment pour effectuer des changements de variable. Il ne faut donc jamais l'omettre!

Cela dit, le t est une variable muette et, à l'instar d'une somme, on note indifféremment

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du.$$

• $\int_a^a f(t)dt = 0.$

Exemple 1. • Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. une fonction constante égale à $k \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est bien continue et positive sur $[a, b]$.

L'aire sous la courbe de f est donc l'aire d'un rectangle de longueur $b - a$ et de largeur k , donc

$$\int_a^b kdt = k(b - a).$$

En notant $F : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ une primitive de f sur $[a, b]$, on remarque que

$$\int_a^b k dt = F(b) - F(a).$$

• Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$. La fonction f est bien continue et positive sur $[0, a]$.

L'aire sous la courbe de f est l'aire du triangle dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(a, 0)$ et (a, a) . C'est donc l'aire d'un triangle de base a et de hauteur a donc l'aire vaut $\frac{1}{2}a \times a = \frac{a^2}{2}$.

Ainsi, $\int_0^a t dt = \frac{a^2}{2}$. En notant $F : \begin{array}{ccc} [0, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2}{2} \end{array}$ une primitive de f sur $[0, a]$, on remarque que $\int_0^a t dt = F(a) - F(0)$.

• Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in]1, 2] \end{cases} \end{array}$.

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et sur $]1, 2]$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1} 2 - x = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 = f(1)$ donc f est continue en 1.

Ainsi f est continue sur $[0, 2]$.

En outre, pour tout $x \in [0, 1]$, $x \geq 0$ et pour tout $x \in]1, 2]$, $2 - x \geq 0$ donc f est bien continue et positive sur $[0, 2]$.

L'aire sous la courbe de f entre 0 et 2 est l'aire du triangle dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(1, 1)$. C'est donc l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 1, donc l'aire vaut $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.

Ainsi, $\int_0^2 f(t) dt = 1$.

Proposition 1: Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

1. (Linéarité) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

2. (Relation de Chasles) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Alors pour tout $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

3. (Positivité) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

4. (Croissance) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

5. (Stricte positivité) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

Remarque 2. Le dernier résultat, lié à la positivité de l'intégrale, implique que si f est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Démonstration.

- Découle de la définition de l'intégrale, en remarquant que si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$, $\lambda f + \mu g$ est bien une fonction continue et positive sur $[a, b]$.
- Découle de la définition de l'intégrale.
- Découle de la définition de l'intégrale.
- Découle de la définition de l'intégrale.
- Si f est identiquement nulle sur $[a, b]$, c'est à dire constante égale à 0, on a

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \times (b - a) = 0.$$

- Supposons que $\int_a^b f(t) dt = 0$. Montrons que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, i.e. $f(x_0) > 0$ puisque f est positive.

Puisque f est continue en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

d'où pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$f(x) = |f(x)| \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0-\alpha} f(t)dt + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt + \int_{x_0+\alpha}^b f(t)dt.$$

Par positivité de l'intégrale, puisque f est positive sur $[a, b]$ on a $\int_a^{x_0-\alpha} f(t)dt \geq 0$ et

$$\int_{x_0+\alpha}^b f(t)dt \geq 0 \text{ donc } \int_a^b f(t)dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt.$$

Or, puisque pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$, on a par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{f(x_0)}{2} dt = \frac{f(x_0)}{2} \times (x_0 + \alpha - (x_0 - \alpha)) = \frac{f(x_0)}{2} \times 2\alpha = \alpha f(x_0) > 0.$$

On en déduit que $\int_a^b f(t)dt > 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\int_a^b f(t)dt = 0$.

Ainsi, nécessairement pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) = 0$ et puisque f est continue en a et en b on a $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ et $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$, ce qui prouve que f est identiquement nulle sur $[a, b]$. ■

17.1.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 2: Parties positive et négative d'une fonction

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I désigne un intervalle réel.

On définit la partie positive de f comme la fonction f^+ définie sur I par

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

On définit de même la partie négative de f comme la fonction f^- définie sur I par

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

Proposition 2: Propriétés des parties positive et négative

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I . Soient f^+ et f^- les parties positive et négative de f .

1. Pour tout $x \in I$, $f^+(x) \geq 0$ et $f^-(x) \geq 0$.
2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.
3. Pour tout $x \in I$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.
4. Les fonctions f^+ et f^- sont continues sur I .

Démonstration.

1. Par définition, on a pour tout $x \in I$, $f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$.
De même, pour tout $x \in I$, $\min(f(x), 0) \leq 0$ donc $f^-(x) = -\min(f(x), 0) \geq 0$.
2. Soit $x \in I$.
 - Si $f(x) > 0$, alors $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$.
 - Si $f(x) \leq 0$, alors $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$.
 Ainsi, pour tout $x \in I$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.
3. Soit $x \in I$.
 - Si $f(x) > 0$, alors $f^+(x) + f^-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|$.
 - Si $f(x) \leq 0$, alors $f^+(x) + f^-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|$.
 Ainsi, pour tout $x \in I$, $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$.
4. D'après les deux alinéas précédents, on a pour tout $x \in I$,

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Puisque la fonction f est continue sur I , la fonction $|f|$ est continue sur I comme composée de fonctions continues.

Ainsi, f^+ et f^- sont continues sur I comme sommes de fonctions continues sur I . ■

Remarque 3. Pour toute fonction continue f , les fonctions f^+ et f^- sont donc des fonctions continues et positives.

Définition 3: Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Soient f^+ et f^- les parties positive et négative de f .

On définit l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt.$$

Remarque 4. Comme pour l'intégrale d'une fonction positive, on a $\int_a^a f(t)dt = 0$.

$$\text{De même, } \int_b^a f(t)dt = \int_b^a f^+(t)dt - \int_b^a f^-(t)dt = -\int_a^b f^+(t)dt + \int_a^b f^-(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 5. La définition est légitime puisque f^+ et f^- sont des fonctions continues et positives sur $[a, b]$ donc les intégrales $\int_a^b f^+(t)dt$ et $\int_a^b f^-(t)dt$ ont été définies auparavant. Cela permet donc de définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un segment $[a, b]$.

Concrètement, l'intégrale d'une fonction continue se calcule en comptant positivement l'aire sous la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement l'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe lorsque la fonction est négative.

Exemple 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $f : \begin{matrix} [-a, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x. \end{matrix}$

$$\text{Pour tout } x \in [-a, a], \text{ on a } f^+(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } x \in [-a, 0] \end{cases} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, a] \\ -x & \text{si } x \in [-a, 0]. \end{cases}$$

$$\text{Par définition, on a } \int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^a f^+(t)dt - \int_{-a}^a f^-(t)dt.$$

- D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^a f^+(t)dt = \int_{-a}^0 f^+(t)dt + \int_0^a f^+(t)dt = \int_{-a}^0 0dt + \int_0^a tdt = 0 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

- De même,

$$\int_{-a}^a f^-(t)dt = \int_{-a}^0 f^-(t)dt + \int_0^a f^-(t)dt = \int_{-a}^0 -tdt + \int_0^a 0dt = \int_{-a}^0 -tdt.$$

Or, cette intégrale est l'aire du triangle dont les sommets sont $(-a, a)$, $(-a, 0)$ et $(0, 0)$. C'est donc un triangle de base a et de hauteur a donc l'aire vaut $\frac{1}{2}a \times a = \frac{a^2}{2}$. Ainsi, $\int_{-a}^a f^-(t)dt = \frac{a^2}{2}$.

$$\text{Finalement, } \int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^a f^+(t)dt - \int_{-a}^a f^-(t)dt = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$$

Ce résultat n'est pas surprenant puisque la fonction f est impaire, donc l'aire sous la courbe comptée positivement entre 0 et a est égale à celle comptée négativement entre $-a$ et 0, donc elles se compensent.

17.1.3 Propriétés de l'intégrale

Proposition 3: Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. (Linéarité) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

2. (Relation de Chasles) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout $c \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

3. (Croissance) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

$$\text{Alors } \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et de signe constant sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

Démonstration.

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons déjà que $\lambda f + \mu g$ est bien une fonction continue sur $[a, b]$.

- Supposons dans un premier temps que $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$.

Alors pour tout $t \in [a, b]$,

$$(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda(f^+(t) - f^-(t)) + \mu(g^+(t) - g^-(t)) = (\lambda f^+(t) + \mu g^+(t)) - (\lambda f^-(t) + \mu g^-(t)).$$

Par ailleurs, on a également pour tout $t \in [a, b]$,

$$(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)^+(t) - (\lambda f + \mu g)^-(t)$$

donc pour tout $t \in [a, b]$,

$$(\lambda f^+(t) + \mu g^+(t)) - (\lambda f^-(t) + \mu g^-(t)) = (\lambda f + \mu g)^+(t) - (\lambda f + \mu g)^-(t)$$

d'où $(\lambda f^+(t) + \mu g^+(t)) + (\lambda f + \mu g)^-(t) = (\lambda f + \mu g)^+(t) + (\lambda f^-(t) + \mu g^-(t))$.

Par linéarité de l'intégrale de fonctions continues et positives sur un segment, on en déduit que

$$\lambda \int_a^b f^+(t)dt + \mu \int_a^b g^+(t)dt + \int_a^b (\lambda f + \mu g)^-(t)dt = \int_a^b (\lambda f + \mu g)^+(t)dt + \lambda \int_a^b f^-(t)dt + \mu \int_a^b g^-(t)dt.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= \int_a^b (\lambda f + \mu g)^+(t)dt - \int_a^b (\lambda f + \mu g)^-(t)dt \\ &= \lambda \left(\int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt \right) + \mu \left(\int_a^b g^+(t)dt - \int_a^b g^-(t)dt \right) \\ &= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt. \end{aligned}$$

• On considère dorénavant λ et μ de signes quelconques.

Soit $\lambda^+ = \max(0, \lambda)$ et $\lambda^- = -\min(0, \lambda)$. On a $\lambda^+ \geq 0$, $\lambda^- \geq 0$ et $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. De même, $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= \int_a^b (\lambda^+ f(t) + \lambda^- (-f(t)) + \mu^+ g(t) + \mu^- (-g(t)))dt \\ &= \lambda^+ \int_a^b f(t)dt + \lambda^- \int_a^b -f(t)dt + \mu^+ \int_a^b g(t)dt + \mu^- \int_a^b -g(t)dt. \end{aligned}$$

Or,

$$0 = \int_a^b 0dt = \int_a^b (f(t) - f(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b -f(t)dt$$

donc $\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$. De même, $\int_a^b -g(t)dt = -\int_a^b g(t)dt$. Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= \lambda^+ \int_a^b f(t)dt - \lambda^- \int_a^b f(t)dt + \mu^+ \int_a^b g(t)dt - \mu^- \int_a^b -g(t)dt \\ &= (\lambda^+ - \lambda^-) \int_a^b f(t)dt + (\mu^+ - \mu^-) \int_a^b g(t)dt \\ &= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la linéarité.

2. On utilise la relation de Chasles pour les intégrales de fonctions positives et la linéarité montrée ci-dessus : pour tout $c \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt &= \int_a^c (f^+(t) - f^-(t))dt + \int_c^b (f^+(t) - f^-(t))dt \\ &= \int_a^c f^+(t)dt - \int_a^c f^-(t)dt + \int_c^b f^+(t)dt - \int_c^b f^-(t)dt \\ &= \int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

3. Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ on a pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) - f(x) \geq 0$ donc d'après la positivité de l'intégrale, $\int_a^b (g(t) - f(t))dt \geq 0$.

Or, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b (g(t) - f(t))dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \geq 0,$$

d'où $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

4. On a déjà montré le résultat dans le cas où f est positive sur $[a, b]$. Supposons donc f négative sur $[a, b]$. Ainsi, la fonction $-f$ est continue et positive sur $[a, b]$ et d'après la linéarité et la stricte positivité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow -\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_a^b -f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], -f(x) = 0$$

ce qui équivaut à dire que f est la fonction nulle sur $[a, b]$. ■

Remarque 6. • On a montré au passage que $\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Ainsi, si $k < 0$, on a $-k > 0$ donc

$$\int_a^b kdt = -\int_a^b -kdt = -(b-a)(-k) = (b-a)k.$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\int_a^b kdt = (b-a)k$.

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b 0dt = 0$.

Proposition 4: Encadrement de l'intégrale

Soit $f : [a, b]$ une fonction continue.

1. (Inégalité de la moyenne)

Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

2. On a

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Remarque 7. D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes donc on a toujours

$$(b-a) \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Démonstration.

1. Par hypothèse, on a pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$$

$$\text{d'où } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

2. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq |f(x)|$ et $-f(x) \leq |f(x)|$ d'où pour tout $x \in [a, b]$,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_a^b -|f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$ i.e.

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

$$\text{d'où } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

■

Exemple 3. Puisque pour tout $x \in [0, \pi]$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, alors $-\pi \leq \int_0^\pi \cos(t) dt \leq \pi$.

17.1.4 Valeur moyenne

Définition 4: Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$ le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Remarque 8. C'est la version continue d'une moyenne discrète du type $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

Exemple 4. • Si une fonction continue f est d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est 0. Ceci confirme l'intuition géométrique, à savoir que si l'aire négative en dessous de l'axe des abscisses est égale à l'aire positive au-dessus de l'axe des abscisses, alors la valeur moyenne de la fonction est nulle.

• Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $\frac{1}{b-a} \int_a^b k dt = k$ donc la valeur moyenne d'une fonction constante égale à k est k .

• Soit $a \geq 0$. Soit $f : \begin{matrix} [0, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{matrix}$. On a vu que $\int_0^a f(t) dt = \frac{a^2}{2}$ donc la valeur moyenne de f sur $[0, a]$ est

$$\frac{1}{a-0} \int_0^a f(t) dt = \frac{a}{2}.$$

Théorème 1: Théorème de la valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ appartient à l'image de f , i.e.

$$\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, on a déjà vu que d'après le théorème des bornes atteintes, on a $(b-a) \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$ d'où

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Soient $(m, M) \in [a, b]^2$ tels que $f(m) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $f(M) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Ainsi, $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \in [f(m), f(M)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe c entre m et M , a fortiori $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$. ■

17.2 Théorème fondamental de l'analyse

17.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I . Soit $a \in I$.

On considère la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

La fonction F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a , i.e.

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(a) = 0.$$

Démonstration. • Montrons que F est une primitive de f sur I .

Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$, i.e. montrons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$.

D'après la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt - (x - x_0) f(x_0) \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f est continue en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On déduit du calcul précédent que pour tout $x \in (I \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \varepsilon \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = 0$, i.e. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ et ce pour tout $x_0 \in I$, donc F est bien une primitive de f sur I .

- Par définition de F , $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.
- Enfin, si G est une primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$, alors pour tout $x \in I$,

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

donc $G - F$ est constante sur I égale à $(G - F)(a) = G(a) - F(a) = 0$ donc $G = F$, d'où l'unicité de F . ■

Remarque 9. • Ainsi, toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (une infinité, égales à une constante additive près). Ceci légitime la définition de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t}$ comme l'unique primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si $a \in I$, alors

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

En effet, la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$ est l'unique primitive de f' sur I qui s'annule en a .

Plus généralement, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I . Soit F une primitive de f sur I . Alors pour tout $(a, b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

On note $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Démonstration. Soit $a \in I$.

La fonction $x \mapsto F(x) - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a donc pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

donc pour tout $b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et ceci est vrai pour tout $(a, b) \in I^2$. ■

Remarque 10. Ce résultat fondamental permet de calculer facilement des intégrales en utilisant les primitives usuelles.

Exemple 5. • $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

• $\int_0^\pi \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$.

• $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_2^3 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

• $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^x dx = [e^x]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} - e^{\ln(2)} = 3 - 2 = 1$.

17.2.2 Application à la fonction logarithme néperien

On a défini pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

On peut maintenant montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, propriété qu'on avait admise dans le chapitre « Fonctions réelles usuelles ».

Proposition 5

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Démonstration. • Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient que pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k},$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant cette double inégalité pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on obtient d'après la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

d'où

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

double inégalité vraie pour tout $n \geq 2$ et également pour $n = 1$, puisque pour $n = 1$, les sommes sont vides et donc nulles. La double inégalité est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Tout d'abord, la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1) + 1) \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Supposons par l'absurde que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit bornée. Puisqu'elle est croissante, on déduit du théorème de la limite monotone que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

A fortiori, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n} - H_n = l - l = 0$ et en passant à la limite dans l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$, on trouve $0 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et non majorée, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

- On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(n) \geq H_n - 1$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$.

Soit $A > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\ln(n) \geq A$.

Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors

$$\forall x \geq n_0, \ln(x) \geq \ln(n_0) \geq A,$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. ■

Remarque 11. • On a montré que pour tout $n \geq 1$, $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n$. Puisque pour tout $n \geq 1$, $H_n > 0$, on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$1 - \frac{1}{H_n} \leq \frac{\ln(n)}{H_n} \leq 1.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{H_n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1$ d'où

$$\ln(n) \sim H_n.$$

- Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = H_n - \ln(n)$. On a vu que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n) \leq H_n$ donc $u_n \geq 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0$$

comme montré précédemment donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente et sa limite est la constante d'Euler-Mascheroni, notée $\gamma \simeq 0,57$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma \simeq 0,57$.

17.3 Méthodes de calculs

17.3.1 Intégration par parties

Proposition 6: Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. Notons que toutes les intégrales existent parce que u, v, u', v' et leurs produits sont bien continues sur $[a, b]$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Or, la fonction uv est une primitive sur $[a, b]$ de $u'v + uv'$ donc

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

$$\text{d'où } \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt. \quad \blacksquare$$

Exemple 6. • Calculons $\int_0^1 te^t dt$. Pour cela, effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = e^t$ et $v(t) = e^t$. On a alors

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

• L'intégration par parties est une méthode efficace pour déterminer des primitives.

Par exemple, déterminons la primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \arctan(t)dt$.

Posons $u(t) = \arctan(t), u'(t) = \frac{1}{1+t^2}, v'(t) = 1$ et $v(t) = t$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = [t \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan(x) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ est l'unique primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

17.3.2 Changement de variable

Théorème 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$.

Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Démonstration.

Notons que puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, la fonction φ' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et par composition, la fonction $f \circ \varphi$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc par produit, la fonction $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ d'où l'existence de l'intégrale de droite.

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I (F existe d'après le théorème fondamental de l'analyse puisque f est continue sur I).

La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ par composition de fonctions dérivables et pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $(F \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$.

On a donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

■

Remarque 12. • On n'a pas nécessairement $\varphi(a) \leq \varphi(\beta)$.

• En pratique, quand on effectue un changement de variable pour calculer $\int_a^b f(\varphi(t))dt$, où $\varphi : [a, b] \rightarrow \varphi([a, b])$ est bijective, on pose $u = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(u)$ d'où "en dérivant", $dt = (\varphi^{-1})'(u)du$.

Si $t = a, u = \varphi(a)$, si $t = b, u = \varphi(b)$, on remplace $\varphi(t)$ par u , dt par $(\varphi^{-1})'(u)du$ et on obtient

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)(\varphi^{-1})'(u)du.$$

Cette recette est justifiée car en appliquant le théorème, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)(\varphi^{-1})'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} ((f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})(u)(\varphi^{-1})'(u)du = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(a))}^{\varphi^{-1}(\varphi(b))} f \circ \varphi(u)du = \int_a^b f(\varphi(u))du.$$

Exemple 7. • Calculons $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Posons $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ sur $[0, \pi]$. D'après le théorème, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\cos(\pi)}^{\cos(0)} \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2(x)} \cos'(x)dx \\ &= \int_{\pi}^0 \sqrt{\sin^2(x)}(-\sin(x))dx \\ &= \int_0^{\pi} |\sin(x)| \sin(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2(x)dx \quad (\text{car pour tout } x \in [0, \pi], \sin(x) \geq 0) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos(2x)dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

• Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculons $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

On a $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int_0^a \frac{1}{a^2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}$.

Posons $u = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = au$ d'où $dx = a du$.

Ainsi, $\int_0^a \frac{1}{a^2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \int_0^1 \frac{1}{a^2} \frac{a du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4a}$.

Corollaire 2: Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Soit $a \geq 0$. Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

2. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Démonstration.

1. Supposons f paire et continue sur $[-a, a]$ et calculons $\int_{-a}^a f(t) dt$. D'après la relation de

Chasles, on a $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, ($du = -dt$), on trouve

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du$$

par parité de f .

Ainsi,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

2. Supposons f impaire et continue sur $[-a, a]$ et calculons $\int_{-a}^a f(t) dt$. D'après la relation

de Chasles, on a $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, ($du = -dt$), on trouve

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u) du = \int_0^a -f(u) du = - \int_0^a f(u) du$$

par imparité de f et linéarité de l'intégrale.

Ainsi,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(t) dt = 0.$$

■

Exemple 8. • $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 2[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

• $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) dt = 0$.

- $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$
- $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$

Corollaire 3: Intégrale d'une fonction périodique

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

1. Pour tout $(a, b) \in I^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_{a+nT}^{b+nT} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$
2. Si $I = \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$

Démonstration.

1. Soient $(a, b) \in I^2$, soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ et que f est T -périodique, alors f est continue sur $[a + nT, b + nT]$ et on a par T -périodicité de f ,

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t) dt = \int_{a+nT}^{b+nT} f(t - nT) dt.$$

Posons $u = t - nT$, d'où $du = dt$. On en déduit

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t - nT) dt = \int_a^b f(u) du$$

$$\text{d'où } \int_{a+nT}^{b+nT} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n = \left\lfloor \frac{a}{T} + 1 \right\rfloor$. On a alors $\frac{a}{T} < n \leq \frac{a}{T} + 1$ d'où $a < nT \leq a + T$.

$$\text{Ainsi, d'après la relation de Chasles, } \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^{a+T} f(t) dt.$$

$$\text{D'après le premier alinéa, on a } \int_a^{nT} f(t) dt = \int_{a-(n-1)T}^{nT-(n-1)T} f(t) dt = \int_{a-(n-1)T}^T f(t) dt.$$

$$\text{De même, } \int_{nT}^{a+T} f(t) dt = \int_{nT-nT}^{a+T-nT} f(t) dt = \int_0^{a-(n-1)T} f(t) dt.$$

De nouveau d'après la relation de Chasles, on en déduit

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^{nT} f(t) dt + \int_{nT}^{a+T} f(t) dt = \int_{a-(n-1)T}^T f(t) dt + \int_0^{a-(n-1)T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

■

Exemple 9. • $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \tan(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+2\pi} \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{2\pi} = 0.$

17.4 Sommes de Riemann

17.4.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition 5: Suite des sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un segment $[a, b]$.

On appelle suite des sommes de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Remarque 13. Concrètement, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on découpe le segment $[a, b]$ en n segments de longueurs égales à $\frac{b-a}{n}$, $\left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right]$ pour $0 \leq k \leq n-1$, et on calcule la moyenne des valeurs de la fonction en les premiers points de chacun de ces segments, i.e.

$$S_n = \frac{1}{n} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) \right).$$

L'importance des sommes de Riemann est justifiée par le théorème suivant :

Théorème 4: Convergence des sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.

Alors la suite des sommes de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Remarque 14. Autrement dit, la suite des sommes de Riemann, dont le terme général est la moyenne de n valeurs prises par la fonction f , converge vers la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Démonstration. On admet le théorème dans le cas général. Montrons-le dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f(t) dt - \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) dt \right| \text{ (Chasles)} \\ &= \frac{1}{b-a} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right) dt \right| \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right) dt \right| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left| f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| dt \text{ (propriété de l'intégrale)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ donc la fonction f' est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, on en déduit que f' est bornée sur $[a, b]$. Ainsi, il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq M$.

Par ailleurs, puisque f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $t \in \left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a) \right]$, il existe $c \in \left] a + \frac{k}{n}(b-a), t \right[$ tel que

$$f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \left(t - \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right) f'(c)$$

d'où

$$\left| f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| \leq \left| a + \frac{k+1}{n}(b-a) - \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| |f'(c)| \leq \frac{b-a}{n} M.$$

En injectant cette inégalité dans le calcul, précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(\frac{b-a}{n}\right) M dt \\ &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M \\ &\leq \frac{b-a}{n} M \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} M = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = 0$ par comparaison d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

■

Remarque 15. On a ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a)}{n} = 0$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

De même, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(b)}{n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{f(b)}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

On a donc également

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

17.4.2 Exemples d'application

Le théorème de convergence des sommes de Riemann est très utile pour calculer des limites de suites a priori compliquées à partir d'intégrales qu'on sait calculer facilement.

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, avec $a = 0$ et $b = 1$.

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

- On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^n} \prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n > 0$ et

$$\ln(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

avec $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = \ln(x)$.

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(S_n) = \int_1^2 \ln(t) dt = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln(2) - 2 + 1 = \ln(4) - 1, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^{\ln(4)-1} = \frac{4}{e}.$$