
CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°6
Samedi 30 mars 2024 (3h30)

Problème 1 : Une puce sur un piano infini

1.

```
import numpy.random as rd
def bond(p):
    u = rd.random()
    if u < p:
        return 1
    else:
        return 2
```
2.

```
def touches_touchées(n,p):
    l=[0]
    position=0
    for k in range (n):
        position+=bond(p)
        l.append(position)
    return l
```
3.

```
def X_n(n,p): #nb de touches PARCOURUES (pas touchées forcément)
    s=0
    for k in range(n):
        s+=bond(p)
    return s
#ou marche aussi: #derniere touche touchée !
def X_n2(n,p):
    return touches_touchées(n,p)[-1]
```
4. On reconnaît une loi binomiale : en effet, si on considère chaque saut comme une expérience de Bernoulli dont le succès (représenté par le fait que la puce saute d'une touche) est réalisé avec une probabilité p , et puisque les sauts sont indépendants, on en déduit que S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , i.e. $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
5.

```
def S_n(n,p):
    s=0
    r=rd.random()
    for k in range(n):
        if r<p:
            s+=1
    return s

#avec une fonction auxiliaire
def un_saut(p):#renvoie 1 si saut de 1 touche, 0 si saut de 2
    r=rd.random()
    if r<p:
        return 1
```

```

else:
    return 0

def S_n2(n,p):
    return sum([un_saut(p) for k in range(n)])

#ou encore, sans sum:
def S_n3(n,p):
    l=[un_saut(p) for k in range(n)]
    succes=0
    for element in l: #on balaye sur les éléments et pas sur les indices
        succes+=element
    return succes

#ou encore
def S_n4(n,p):
    l=[un_saut(p) for k in range(n)]
    succes=0
    for k in range(len(l)): #on balaye sur les indices
        succes+=l[k]
    return succes

```

6. (a) Après n bonds, la puce aura réalisé S_n sauts d'une touche et $(n - S_n)$ sauts de 2 touches donc le nombre de touches parcourues après n sauts vaut

$$X_n = S_n + 2(n - S_n) = 2n - S_n.$$

- (b) • Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X_n) = 2n - \mathbb{E}(S_n)$.
Puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on sait que $\mathbb{E}(S_n) = np$ donc

$$\mathbb{E}(X_n) = 2n - np = n(2 - p).$$

- Par propriété de la variance, puisque $2n$ est une constante, on a

$$V(X_n) = V(-S_n + 2n) = (-1)^2 V(S_n) = V(S_n).$$

Puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on sait que $V(S_n) = np(1 - p)$ donc

$$V(X_n) = np(1 - p).$$

- (c)

```
def esp_Xn(n,p):
    real_X=[X_n(n,p) for k in range (1000)]
    return sum(real_X)/len(real_X)
```

7. Au maximum, si la puce choisit de ne sauter qu'une touche à la fois, elle devra faire n bonds pour avancer de n touches donc $Y_n \leq n$.

Au minimum, c'est à dire si la puce décide de sauter de deux touches à chaque fois, elle devra faire $\frac{n}{2}$ bonds pour avancer de n touches si n est pair ; si n est impair, $n - 1$ est pair et elle pourra parcourir les $n - 1$ premières touches en $\frac{n-1}{2}$ bonds et il lui restera un saut d'une touche à effectuer, ce qui donne en tout $\frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$ bonds.

Enfin, la variable aléatoire Y_n peut prendre comme valeur tous les entiers entre sa valeur minimale et sa maximale (puisque la puce peut faire des sauts d'une seule touche).

Donc $Y_n(\Omega) = \llbracket \frac{n}{2}, n \rrbracket$ si n est pair et $\llbracket \frac{n+1}{2}, n \rrbracket$ si n est impair, ce qu'on peut résumer en

$$Y_n(\Omega) = \left[\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n \right] \subset \llbracket 0, n \rrbracket.$$

8. (a) Soit $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

Notons que les événements $(X_1 = 1)$ et $(X_1 = 2)$ forment bien un système complet d'événements puisque le nombre de touches parcourues après un seul bond est nécessairement égal à 1 ou 2.

D'après la formule des probabilités totales dans ce système complet d'événements, on a

$$\mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(Y_{n+2} = k+1) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}_{(X_1=2)}(Y_{n+2} = k+1).$$

La variable aléatoire X_1 désigne le nombre de touches parcourues au premier bond, donc d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 - p$.

Par ailleurs, $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(Y_{n+2} = k+1)$ désigne la probabilité que la puce ait eu besoin de $k+1$ bonds pour parcourir $n+2$ touches sachant qu'elle en avait parcouru une après le premier bond. Il lui restait donc $n+1$ touches à parcourir lors des k bonds suivants, et puisque les sauts sont indépendants, on en déduit que la probabilité de parcourir $n+1$ touches en k sauts vaut $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k)$.

Ainsi, on a $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(Y_{n+2} = k+1) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k)$.

De même, $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(Y_{n+2} = k+1)$ désigne la probabilité que la puce ait eu besoin de $k+1$ bonds pour parcourir $n+2$ touches sachant qu'elle en avait parcouru deux après le premier bond. Il lui restait donc n touches à parcourir lors des k bonds suivants, et puisque les sauts sont indépendants, on en déduit que la probabilité de parcourir n touches en k sauts vaut $\mathbb{P}(Y_n = k)$.

On obtient donc

$$\mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) = p\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) + (1-p)\mathbb{P}(Y_n = k).$$

(b) D'après la question 3, $Y_{n+2}(\Omega) \subset \llbracket 0, n+2 \rrbracket$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+2}) &= \sum_{i=0}^{n+2} i\mathbb{P}(Y_{n+2} = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+2} i\mathbb{P}(Y_{n+2} = i) \quad (\text{car le terme pour } i=0 \text{ est nul}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) \quad (\text{en posant le changement d'indice } k = i-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k\mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) + \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) \quad (\text{par linéarité de la somme}). \end{aligned}$$

• Calculons $\sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1)$.

En posant $j = k+1$, on obtient $\sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) = \sum_{j=1}^{n+2} \mathbb{P}(Y_{n+2} = j)$.

Or, $\mathbb{P}(Y_{n+2} = 0) = 0$, puisque si $n \in \mathbb{N}$, le nombre de bonds nécessaires pour avancer de $n + 2$ touches (avec $n \geq 2$) ne peut pas valoir 0, donc $\sum_{j=1}^{n+2} \mathbb{P}(Y_{n+2} = j) = \sum_{j=0}^{n+2} \mathbb{P}(Y_{n+2} = j)$ puisqu'on a rajouté un terme nul.

Or, $Y_{n+2}(\Omega) \subset \llbracket 0, n+2 \rrbracket$ donc $\sum_{j=0}^{n+2} \mathbb{P}(Y_{n+2} = j) = 1$, d'où $\sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) = 1$.

• Calculons $\sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1)$.

En utilisant la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1) &= \sum_{k=0}^{n+1} k (p \mathbb{P}(Y_{n+1} = k) + (1-p) \mathbb{P}(Y_n = k)) \\ &= p \sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}(Y_{n+1} = k) + (1-p) \sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}(Y_n = k) \\ &= p \mathbb{E}(Y_{n+1}) + (1-p) \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Y_n = k) \quad (\text{car } Y_n \subset \llbracket 0, n \rrbracket) \\ &= p \mathbb{E}(Y_{n+1}) + (1-p) \mathbb{E}(Y_n). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_{n+2}) = p \mathbb{E}(Y_{n+1}) + (1-p) \mathbb{E}(Y_n) + 1.}$$

9. (a) Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - cn$.

D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \mathbb{E}(Y_{n+2}) - c(n+2) \\ &= p \mathbb{E}(Y_{n+1}) + (1-p) \mathbb{E}(Y_n) + 1 - cn - 2c \\ &= p(u_{n+1} + c(n+1)) + (1-p)(u_n + cn) + 1 - cn - 2c \\ &= pu_{n+1} + (1-p)u_n + pcn + pc + cn - pcn + 1 - cn - 2c \\ &= pu_{n+1} + (1-p)u_n + 1 + pc - 2c. \end{aligned}$$

Pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit récurrente linéaire d'ordre deux, il faut et il suffit que

$1 + pc - 2c = 0$, i.e. $\boxed{c = \frac{1}{2-p}}$ (ce qui est possible car $2 - p > 1$).

(b) • D'après la question précédente, pour $c = \frac{1}{2-p}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - pu_{n+1} + (p-1)u_n = 0.$$

On considère $(E) : r^2 - pr + (p-1)$ l'équation caractéristique associée dont les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = p-1$ (qui sont bien distinctes car $p-1 \neq 1$ puisque $p \neq 2$).

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu(p-1)^n = \lambda + \mu(p-1)^n,$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = u_n + cn = \lambda + \mu(p-1)^n + \frac{n}{2-p}.$$

On détermine λ et μ grâce à $\mathbb{E}(Y_0)$ et $\mathbb{E}(Y_1)$.

D'après l'énoncé, il est clair que $Y_0 = 0$ et $Y_1 = 1$ donc $\mathbb{E}(Y_0) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_1) = 1$, et on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + \mu(p-1) + \frac{1}{2-p} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= -\lambda \\ \lambda(2-p) &= \frac{1-p}{2-p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{1-p}{(2-p)^2} \\ \mu &= \frac{p-1}{(2-p)^2} \end{cases}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1-p}{(2-p)^2} + \frac{(p-1)^{n+1}}{(2-p)^2} + \frac{n}{2-p}.$$

(c) Puisque $p \in]0, 1[$, $2-p > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2-p} = +\infty$.

Par ailleurs, $p-1 \in]-1, 0[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p-1)^{n+1} = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{2-p} \left(1 + \frac{1-p}{n(2-p)} + \frac{(p-1)^{n+1}}{n(2-p)} \right)$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-p}{n(2-p)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(p-1)^{n+1}}{n(2-p)} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1-p}{n(2-p)} + \frac{(p-1)^{n+1}}{n(2-p)} = 1.$$

On en conclut que $\mathbb{E}(Y_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2-p}$.

Problème 2 : Une suite définie par récurrence

Partie I

1. (a) • On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ donc par opérations sur les limites, on

obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

• Par théorème de croissances comparées, on a immédiatement $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$.

(b) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

(c) Or, $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$ et $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e$ et pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur $]0, e[$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$.

On a le tableau de variation suivant :

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
h	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^{ax} > 0$, pour avoir $f(x) = x$, il faut nécessairement que x soit strictement positif.

On suppose dorénavant $x > 0$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \Leftrightarrow e^{ax} = x \Leftrightarrow ax = \ln(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = a \Leftrightarrow h(x) = a.$$

On a les cas suivants :

- Si $a \in]-\infty, 0]$, puisque h est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, on déduit du théorème de la bijection que h réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $h(]0, 1]) =]-\infty, 0]$ donc il existe un unique réel $x \in]0, 1]$ tel que $h(x) = a$.

Par ailleurs, $h(]1, +\infty[) = h(]1, e] \cup [e, +\infty[) = h(]1, e]) \cup h([e, +\infty[) =]0, \frac{1}{e}] \cup]0, \frac{1}{e}[=]0, \frac{1}{e}]$ donc il n'existe pas de réel $x \in]1, +\infty[$ pour lequel $h(x) = a$.

Si $a \leq 0$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel $f(x) = x$.

- Supposons que $a \in]0, \frac{1}{e}[$. On a vu que $h(]0, 1]) =]-\infty, 0]$ donc il n'existe pas de réel $x \in]0, 1]$ tel que $h(x) = a$.

Puisque h est continue et strictement croissante sur $]1, e[$, on déduit du théorème de la bijection que h réalise une bijection de $]1, e[$ sur $h(]1, e[) =]0, \frac{1}{e}[$ donc il existe un unique réel $x_0 \in]1, e[$ tel que $h(x_0) = a$.

De même, puisque h est continue et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$, on déduit du théorème de la bijection que h réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $h(]e, +\infty[) =]0, \frac{1}{e}[$ donc il existe un unique réel $x_1 \in]e, +\infty[$ tel que $h(x_1) = a$.

Si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $a = \frac{1}{e}$, on voit d'après le tableau de variation de h qu'il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+$ pour lequel $h(x) = \frac{1}{e}$ et on a $x = e$.

Si $a = \frac{1}{e}$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel $f(x) = x$.

- Si $a > \frac{1}{e}$ il n'existe pas de réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel $f(x) = x$ puisque

$$h(\mathbb{R}_+^*) = h(]0, e] \cup [e, +\infty[) = h(]0, e]) \cup h([e, +\infty[) = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right] \cup \left] 0, \frac{1}{e} \right] = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right].$$

Partie II

- Si $a = 0$, la fonction f est constante égale à 1 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
 • Si $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition de limites, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} = +\infty.$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = ae^{ax}$. Or, $a \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{ax} > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq 0$, ce qui assure que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Tout d'abord, remarquons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie car f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$ (qui est le domaine de définition de f).

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_1 = f(u_0) = f(0) = e^{a \times 0} = 1 \geq 0 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n \leq u_{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

On sait par hypothèse de récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ avec u_n et u_{n+1} deux réels positifs.

Or, d'après la question précédente, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, i.e. $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- On suppose que $a \in [0, \frac{1}{e}]$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \leq e$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n \leq e$. Montrons que $u_{n+1} \leq e$.

On sait d'après la question 1 de la partie II que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(e) = e^{a \times e}.$$

Or, on a supposé $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$ donc $0 \leq a \times e \leq 1$ et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $e^{a \times e} \leq e^1 = e$ donc $u_{n+1} \leq e^{a \times e} \leq e$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante (d'après la question précédente) et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque : on sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers un point fixe de f et d'après la partie I, si $a \in [0, \frac{1}{e}]$, la fonction f admet bien des points fixes.

- On suppose que $a > \frac{1}{e}$. Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. D'après le théorème de la limite monotone, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge.

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle converge vers un réel positif l .

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait par caractérisation séquentielle de la limite que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$ donc l est un point fixe de f .

Or, d'après la partie I, si $a > \frac{1}{e}$, la fonction f n'admet pas de point fixe.

On aboutit à une contradiction, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et non majorée. Par théorème, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Partie III

1. Puisque $a < 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} = 0.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = ae^{ax}$. Or, $a < 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{ax} > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) < 0$, ce qui assure que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \in [0, 1]$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_n \in [0, 1]$. Montrons que $u_{n+1} \in [0, 1]$. On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0, 1]$ et f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ d'après la question précédente donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [f(1), f(0)] = [e^a, 1].$$

Or, $a < 0$, donc $e^a \in]0, 1[$, d'où $[e^a, 1] \subset [0, 1]$ et il s'ensuit que $u_{n+1} \in [0, 1]$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1].$$

- (b) • Montrons que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, i.e. montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

- **Initialisation** : On a $u_0 = 0, u_1 = f(u_0) = f(0) = e^0 = 1, u_2 = f(u_1) = f(1) = e^a > 0$ donc $u_2 > u_0$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

Montrons que $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$.

Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ donc par croissance de $f \circ f$, on obtient $(f \circ f)(u_{2n}) \leq (f \circ f)(u_{2n+2})$, i.e. $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$, donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• Montrons que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, i.e. montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$.

- **Initialisation** : On a $u_1 = 1$ et $u_3 = f(u_2) = e^{ae^a}$. Or, $ae^a < 0$ donc $u_3 = e^{ae^a} < 1 = u_1$, ce qui prouve la propriété au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$.

Montrons que $u_{2n+3} \geq u_{2n+5}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$ donc par croissance de $f \circ f$, on obtient $(f \circ f)(u_{2n+1}) \geq (f \circ f)(u_{2n+3})$, i.e. $u_{2n+3} \geq u_{2n+5}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$, donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (c) D'après la question 3.a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0, 1]$ et $u_{2n+1} \in [0, 1]$ donc les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

En particulier, la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée et la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que

$$\boxed{\text{les suites } (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont convergentes.}}$$

De plus, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{2n} \leq 1$ et $0 \leq u_{2n+1} \leq 1$, par passage à la limite avec des inégalités larges, on en déduit

$$\boxed{0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} \leq 1.}$$

4. Soit $x \in]0, 1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) = x &\Leftrightarrow e^{ae^{ax}} = x \\ &\Leftrightarrow ae^{ax} = \ln(x) \quad (\text{possible car } x > 0) \\ &\Leftrightarrow e^{ax} = \frac{\ln(x)}{a}. \end{aligned}$$

Puisque $x \in]0, 1[$, on a $\ln(x) < 0$ donc $\frac{\ln(x)}{a} > 0$ car $a < 0$. On a donc l'équivalence

$$\boxed{(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax = \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0.}$$

5. (a) La fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]0, 1[$ et on a pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\boxed{g'(x) = a - \frac{\frac{1}{ax}}{\frac{\ln(x)}{a}} = a - \frac{1}{x \ln(x)}.$$

De même, g' est dérivable sur $]0, 1[$ et on a pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\boxed{g''(x) = \frac{\ln(x) + x \times \frac{1}{x}}{(x \ln(x))^2} = \frac{\ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2}.$$

(b) On a pour tout $x \in]0, 1[$, $(x \ln(x))^2 > 0$ donc le signe de $g''(x)$ dépend uniquement du numérateur.

Par stricte croissance de $\ln$ sur $]0, 1[$, on a

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

On a donc $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]e^{-1}, 1[$, $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, e^{-1}[$ et $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Ainsi, la fonction g' est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}[$ et strictement croissante sur $]e^{-1}, 1[$.

On en déduit que pour tout $x \in]0, 1[$, $g'(x) \geq g'(e^{-1})$.

Or, $g'(e^{-1}) = a - \frac{1}{e^{-1} \ln(e^{-1})} = a - \frac{1}{-e^{-1}} = a + e > 0$ car $a > -e$.

Il en découle que pour tout $x \in]0, 1[$, $g'(x) > 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]0, 1[.}$

- (c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$ donc d'après le théorème de la bijection, g est bijective de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$.

Puisque g est strictement croissante sur $]0, 1[$, d'après le théorème de la limite monotone, g admet des limites en 0^+ et 1^- et on aura $g(]0, 1[) =] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)[$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} ax = 0$.

Par ailleurs, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et puisque $a < 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{a} = +\infty$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = +\infty.$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = -\infty$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} ax = a$.

Par ailleurs, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{a} = 0^+$ car $a < 0$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc par composition de limites, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = -\infty.$$

Finalement, par somme de limites, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = +\infty.$$

Ainsi, $g(]0, 1[) =] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ donc g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

6. On a $(f \circ f)(0) = f(1) = e^a \neq 0$ donc 0 n'est pas un point fixe de $f \circ f$.

De même, $(f \circ f)(1) = f(e^a) = e^{ae^a}$.

Or, $e^a > 0$ et $a < 0$ donc $ae^a < 0$ d'où par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $(f \circ f)(1) = e^{ae^a} < e^0 = 1$ donc 1 n'est pas non plus un point fixe de $f \circ f$.

Ainsi, $f \circ f$ admet un point fixe dans $[0, 1]$ si et seulement si f admet un point fixe dans $]0, 1[$.

Or, d'après la question 4, on pour tout $x \in]0, 1[$:

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

De plus, d'après la question précédente, g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $x \in]0, 1[$ tel que $g(x) = 0$, i.e. il existe un unique réel $x \in]0, 1[$ tel que $(f \circ f)(x) = x$ donc $f \circ f$ admet un unique point fixe dans $[0, 1]$.

7. D'après la question 3.c), les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et (u_{2n+1}) sont convergentes de limites appartenant à $[0, 1]$.

Par ailleurs, ce sont des suites définies par récurrence au moyen de la fonction $f \circ f$ (en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1})$).

Donc les limites respectives de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des points fixes de $f \circ f$ dans $[0, 1]$.

Or, d'après la question précédente, $f \circ f$ admet un unique point fixe dans $[0, 1]$. Notons-le l .

Nécessairement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$, on sait que ceci implique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et de même limite.

On en conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.