Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°6

Samedi 30 mars 2024 (3h30)

L'énoncé est constitué de deux problèmes et comporte 4 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Une puce sur un piano infini

Soit $p \in]0;1[$.
Une puce saute sur les touches d'un piano infini (dans les aigus). Les touches du piano sont numérotées du grave vers l'aigu en partant de 0. La puce commence sur la première touche puis se déplace vers les aigus par bonds successifs. A chaque saut, elle se déplace soit d'une touche, avec probabilité p, soit de deux touches, avec probabilité $1-p$. On suppose que les sauts sont indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les variables aléatoires suivantes :

- S_n désigne le nombre de fois où la puce choisit de sauter d'une touche au cours de ses n premiers bonds ;
- X_n désigne le nombre de touches parcourues après n bonds ;
- Y_n désigne le nombre de bonds nécessaires à la puce pour avancer de n touches.

Pour les questions `Python`, on suppose que la bibliothèque numpy.random a été importée au préalable via la commande : `import numpy.random as rd`.

Soit n un entier naturel.

1. Ecrire une fonction Python `bond(p)` qui simule un bond de la puce et renvoie 1 si la puce se déplace d'une touche, 2 si elle se déplace de deux touches.
2. En utilisant la fonction `bond(p)`, écrire une fonction `touches_touchées(n,p)` qui renvoie une liste contenant toutes les touches que la puce a touchées après n sauts.
3. Ecrire une fonction `Python` qui simule la variable aléatoire X_n. On pourra s'aider d'une fonction précédente.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n.
5. Ecrire une fonction `Python` qui simule la variable aléatoire S_n. Cette fonction prendra en entrée deux paramètres. (*On pourra créer une petite fonction auxiliaire si besoin, que l'on pourra utiliser dans la fonction qui simule S_n, mais on peut très bien faire sans.*)

6. (a) Exprimer X_n en fonction de S_n.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_n.
   (c) Ecrire une fonction `Python` qui estime l'espérance de la variable X_n. On pourra par exemple d'abord construire une liste qui contient un grand nombre de simulations de X_n. Comment optimiser cette estimation ?
7. Quel est l'image de la variable aléatoire Y_n ?
   On vérifiera en particulier que $Y_n(\Omega) \subseteq [\![0;n]\!]$.
8. (a) Pour tout $k \in [\![0;n+1]\!]$, exprimer $\mathbb{P}(Y_{n+2} = k+1)$ en fonction de $\mathbb{P}(Y_{n+1} = k)$ et de $\mathbb{P}(Y_n = k)$.
   On pourra appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{(X_1 = 1); (X_1 = 2)\}$.
   (b) En déduire la relation de récurrence suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_{n+2}) = p\mathbb{E}(Y_{n+1}) + (1-p)\mathbb{E}(Y_n) + 1.$$
9. (a) Trouver un réel c tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{E}(Y_n) - cn$$
   soit récurrente linéaire d'ordre deux.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de la variable aléatoire Y_n.
   (c) Donner un équivalent de la suite $(\mathbb{E}(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 : Une suite définie par récurrence

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = e^{ax}.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n). \end{cases}$$

Partie I

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
   (b) Déterminer la fonction dérivée h' de h.
   (c) Etablir le tableau de variation de h.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ en discutant selon les valeurs de a.

Partie II

On suppose dans cette partie que $a \geqslant 0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Justifier que f est monotone et préciser sa monotonie.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{e}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par e. Qu'en conclure ?
5. On suppose que $a > \frac{1}{e}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Partie III

On suppose dans cette partie que $a < 0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Justifier que f est monotone et préciser sa monotonie.
3. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
   (b) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
   (c) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites appartenant à $[0, 1]$.
4. Démontrer que pour tout $x \in]0, 1[$:

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0.$$

Dans toute la suite, on suppose $-e < a < 0$.

5. On note g la fonction définie sur $]0, 1[$ par

$$g(x) = ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right).$$

(a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.

(b) En déduire les variations de la fonction g.

(c) Montrer que g réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que l'équation $(f \circ f)(x) = x$ possède une unique solution dans l'intervalle fermé $[0,1]$.
7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.