

## Liste d'exercices n°16

## Dérivation

**Exercice 1.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $a$  un point de  $I$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$  et dérivables en  $a$ . Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

**Exercice 2.** Etudier la fonction  $f: x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Exercice 3.** Considérons l'équation  $(E)$  suivante, d'inconnue  $x$  réelle :

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Etudier la fonction  $x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x)$ .
2. Montrer que l'équation  $(E)$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .
3. Résoudre l'équation  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** Justifier que les fonctions suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  puis calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , leurs dérivées  $n$ -ièmes.

1.  $\cos$
2.  $f: x \mapsto \frac{1}{2-x}$

**Exercice 5.** Montrer que la fonction suivante est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . Montrer que  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et que pour tout  $x \in I$ ,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Cette formule s'appelle la formule de Leibniz.

**Exercice 7.** Considérons la fonction suivante :  $f: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe deux réels  $u_n$  et  $v_n$  tels que pour tout réel  $x$  strictement positif, on ait :

$$f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}.$$

3. Expliciter les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 8.** Trouver une primitive des fonctions suivantes.

$$1. t \mapsto (2t + 1)^7$$

$$2. u \mapsto \frac{1}{3u}$$

$$3. x \mapsto e^{\sin(x)} \cos(x)$$

$$4. t \mapsto \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}$$

$$5. x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

$$6. x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$7. u \mapsto \frac{1}{u \ln(u)}$$

**Exercice 9.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a; b[$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ , que  $f'(a) > 0$  et que  $f'(b) > 0$ . Montrer qu'il existe trois éléments  $c_1, c_2$  et  $c_3$  dans  $]a; b[$  tels que :

$$c_1 < c_2 < c_3 \quad \text{et} \quad f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

**Exercice 10.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$  et dérivables sur  $]a; b[$ .

1. Montrer qu'il existe  $c$  dans  $]a; b[$  tel que :

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. On suppose que  $f(a) = g(a) = 0$ , que  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ .

(a) Montrer que  $g$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$ .

(b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

**Exercice 11.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soit  $a \in I$ .

On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ , où  $l \in \mathbb{R}$ .

Montrer que  $f$  est dérivable en  $a$  et que  $f'(a) = l$ .

**Exercice 12.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable telle que  $f(a) = f'(a)$  et  $f(b) = f'(b)$ .

Montrer qu'il existe un élément  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = f''(c)$ .

**Exercice 13.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer qu'il existe un élément  $c$  de  $]a; b[$

tel que  $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$ .

**Exercice 14.** Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $f$  et  $f'$  ont des limites finies en  $+\infty$ .

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

**Exercice 15.** Soit  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$  tel que  $f(a) = f(b) = 0$  et  $c \in ]a, b[$ .

Montrer qu'il existe  $\gamma \in ]a, b[$ , tel que  $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\gamma)$ .