Corrigé du devoir maison n°11

# Fonctions trigonométriques réciproques

1. (a) Par imparité de la fonction sinus, on a pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\sin(-\arcsin(x)) = -\sin(\arcsin(x)) = -x = \sin(\arcsin(-x))$$

donc par injectivité de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ donc $\boxed{\text{la fonction arcsin est impaire.}}$

Puisque la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on déduit du théorème de la bijection que $\boxed{\text{arcsin est continue et strictement croissante sur } [-1,1].}$

(b) La fonction sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et on a pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin'(x) = \cos(x)$.

Ainsi, $\sin'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, on en déduit que arcsin est dérivable en $x \in [-1,1]$ si et seulement si $\arcsin(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est à dire si et seulement si $x \in ]-1,1[$.

Ainsi, $\boxed{\text{arcsin est dérivable sur } ]-1,1[}$ et on a pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or, pour tout $x \in ]-1,1[, \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$.

Pour tout $x \in ]-1,1[, \arcsin(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arcsin(x)) > 0$, d'où

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

2. (a) Puisque la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on déduit du théorème de la bijection que $\boxed{\text{arccos est continue et strictement décroissante sur } [-1,1].}$

(b) La fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$ et on a pour tout $x \in [0,\pi], \cos'(x) = -\sin(x)$.

Ainsi, $\cos'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in ]0,\pi[$.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, on en déduit que arccos est dérivable en $x \in [-1,1]$ si et seulement si $\arccos(x) \in ]0,\pi[$, c'est à dire si et seulement si $x \in ]-1,1[$.

Ainsi, $\boxed{\text{arccos est dérivable sur } ]-1,1[}$ et on a pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Or, pour tout $x \in ]-1,1[, \sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$.

Pour tout $x \in ]-1,1[, \arccos(x) \in ]0,\pi[$ donc $\sin(\arccos(x)) > 0$ d'où

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

(c) Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x)+\arccos(-x). \end{array}$

D'après la question précédente, la fonction $f$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$f'(x) = \arccos'(x) - \arccos'(-x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$$

donc la fonction $f$ est constante sur $]-1,1[$.
Ainsi, pour tout $x \in ]-1,1[, \arccos(x)+\arccos(-x) = f(0) = 2\arccos(0) = \pi$.
D'autre part, $\arccos(1)+\arccos(-1) = \arccos(-1)+\arccos(1) = 0+\pi = \pi$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,1], \arccos(x)+\arccos(-x) = \pi.}$

3. Soit $g : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x)+\arccos(x). \end{array}$

La fonction $g$ est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$g'(x) = \arcsin'(x)+\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

donc la fonction $g$ est constante sur $]-1,1[$.
Ainsi, pour tout $x \in ]-1,1[, \arcsin(x)+\arccos(x) = g(x) = g(0) = \arcsin(0)+\arccos(0) = 0+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
D'autre part,

$$g(-1) = \arcsin(-1)+\arccos(-1) = -\frac{\pi}{2}+\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad g(1) = \arcsin(1)+\arccos(1) = \frac{\pi}{2}+0 = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,1], \arcsin(x)+\arccos(x) = \frac{\pi}{2}.}$

4. Soit $v : x \mapsto \arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})$. La fonction $v$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$v'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Attention : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle donc on ne peut pas en déduire que $v$ est constante sur $\mathbb{R}^*$! On peut simplement en déduire que $v$ est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Ainsi, pour tout $x > 0, v(x) = v(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.
De même, pour tout $x < 0, v(x) = v(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ donc

$$\boxed{\forall x > 0, \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x < 0, \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.}$$

5. (a) Soit $w : x \mapsto \arctan(x) - \arctan(\frac{1}{x})$. La fonction $w$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$w'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*, w'(x) > 0$ donc $w$ est strictement croissante sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Calculons les limites de $w$ aux bornes de son domaine de définition.

• On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(x) = 0$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Par somme de limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} w(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

• De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(x) = 0$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Par somme de limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} w(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

• On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Par somme de limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} w(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

• Enfin, $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Par somme de limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0^-} w(x) = \lim_{x\to 0^-} \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w(x)$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ ‖ $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} w(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} w(x)$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } w \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0.}$$

(b) La fonction $w$ est continue, strictement croissante sur $]-\infty,0[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,0[$ sur $w(]-\infty,0[)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Puisque $\frac{\pi}{4}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, il existe donc un unique réel $x_0\in]-\infty,0[$ tel qu e $w(x_0)=\frac{\pi}{4}$.
De même,la fonction $w$ est continue, strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $w(]0,+\infty[)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Puisque $\frac{\pi}{4}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, il existe donc un unique réel $x_1\in]0,+\infty[$ tel que $w(x_1)=\frac{\pi}{4}$.
Finalement, $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ admet deux solutions réelles.}}$

(c) D'après le tableau de variation de la fonction $w$, on sait que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\arctan(x)-\arctan(\frac{1}{x})\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\arctan(\tan\left(\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right))=\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Ceci implique qu'on a l'équivalence

$$(E)\Leftrightarrow\tan\left(\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{\tan(\arctan(x))-\tan(\arctan(\frac{1}{x}))}{1+\tan(\arctan(x))\tan(\arctan(\frac{1}{x}))}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-\frac{1}{x}}{2}=1\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow\boxed{x=1-\sqrt{2}\,\text{ou}\,x=1+\sqrt{2}.}$$

6. Soit $h:x\longmapsto\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)-2\arctan(\sqrt{x})$.

Tout d'abord, remarquons que la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc il est nécessaire que $x$ soit positif.
D'autre part, pour tout $x\geqslant 0, 1+x>0$ et $-1-x<1-x<1+x$ donc en divisant par $1+x, -1<\dfrac{1-x}{1+x}<1$ pour tout $x\geqslant 0$.
Ainsi, la fonction $g$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x}{1+x})^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+x}\\
&= \frac{2}{(1+x)^2}\times\frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+x}\\
&= \frac{2}{1+x}\times\frac{1}{\sqrt{4x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+x}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

donc la fonction $h$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x>0$,

$$h(x)=h(1)=\arccos(0)-2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}-2\times\frac{\pi}{4}=0.$$

En outre, $h(0)=\arccos(1)-2\arctan(0)=0$.
Finalement, pour tout $x\geqslant 0, h(x)=0$ donc

$$\boxed{\text{pour tout}\,x\geqslant 0, \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=2\arctan(\sqrt{x}).}$$

7. Soit $u:x\longmapsto\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\arctan(x)$.

Notons que la fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction arcsin est, elle, définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in ]-1,1[$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ donc $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, i.e.

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1.$$

Ainsi, la fonction $u$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})^2}} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x^2}} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la fonction $u$ est constante sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = u(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0,$$

i.e. $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x) = 0$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x).}$