

Corrigé de la liste d'exercices n°17

Intégration

Exercice 1.

1. La fonction est bien définie si $t^2 + 2t - 3 \neq 0$, i.e. si $t \notin \{1, -3\}$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.
2. Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3} \Leftrightarrow \frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{(a+b)t+3a-b}{t^2+2t-3} \Leftrightarrow t+7 = (a+b)t+3a-b.$$

Par identification, on en déduit

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ 3a-b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

3. D'après la question précédente, on a

$$I = \int_{-2}^0 \frac{t+7}{t^2+2t-3} dt = \int_{-2}^0 \left(\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t+3} \right) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$I = 2 \int_{-2}^0 \frac{dt}{t-1} - \int_{-2}^0 \frac{dt}{t+3} = 2[\ln(|t-1|)]_{-2}^0 - [\ln(|t+3|)]_{-2}^0 = -2\ln(3) - \ln(3) = -3\ln(3).$$

Exercice 2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$ est définie sur $[1, +\infty[$.

On a pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1 - (x-1)} = \frac{\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\sqrt{x-1}}{2}$.

Une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est alors $F : x \mapsto \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(2t) = \frac{\cos(4t) + 1}{2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^\pi \cos^2(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(4t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}) = -\frac{1}{8i} (2i \sin(3t) - 6i \sin(t)) = \frac{3 \sin(t) - \sin(3t)}{4}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^\pi \sin^3(t) dt = \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin(t) dt - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(3t) dt = \frac{3}{4} [-\cos(t)]_0^\pi - \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(3t)}{3} \right]_0^\pi = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

3. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \cos^3(t) \sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{128} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it})(e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\
 &= \frac{1}{128} (2 \cos(7t) - 2 \cos(5t) - 6 \cos(3t) + 6 \cos(t)) \\
 &= \frac{1}{64} (\cos(7t) - \cos(5t) - 3 \cos(3t) + 3 \cos(t)).
 \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt &= \frac{1}{64} \left(\int_0^\pi \cos(7t) dt - \int_0^\pi \cos(5t) dt - 3 \int_0^\pi \cos(3t) dt + 3 \int_0^\pi \cos(t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{64} \left(\left[\frac{\sin(7t)}{7} \right]_0^\pi - \left[\frac{\sin(5t)}{5} \right]_0^\pi - 3 \left[\frac{\sin(3t)}{3} \right]_0^\pi + 3 \left[\sin(t) \right]_0^\pi \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^4(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on réalise le changement de variable $u = \pi - t$ et on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3(\pi - u) \sin^4(\pi - u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3(u) \sin^4(u) du \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u) \sin^4(u) du
 \end{aligned}$$

donc $\int_0^\pi \cos^3(t) \sin^4(t) dt = 0$.

4. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \cos^2(t) \sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{64} (e^{2it} + 2 + e^{-2it})(e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\
 &= \frac{1}{64} (2 \cos(6t) - 4 \cos(4t) - 2 \cos(2t) + 4) \\
 &= \frac{1}{32} \cos(6t) - \frac{1}{16} \cos(4t) - \frac{1}{32} \cos(2t) + \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos^2(t) \sin^4(t) dt &= \frac{1}{32} \int_0^\pi \cos(6t) dt - \frac{1}{16} \int_0^\pi \cos(4t) dt - \frac{1}{32} \int_0^\pi \cos(2t) dt + \frac{1}{16} \int_0^\pi dt \\
 &= \frac{1}{32} \left[\frac{\sin(6t)}{6} \right]_0^\pi - \frac{1}{16} \left[\frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^\pi - \frac{1}{32} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^\pi + \frac{\pi}{16} \\
 &= \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Puisque f est continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème de l'analyse, F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ et puisque f est continue sur \mathbb{R} , on en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

D'après la relation de Chasles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x^2+1} f(t)dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{x^2+1} f(t)dt - \int_0^{x-1} f(t)dt \right) = \frac{1}{2} (F(x^2+1) - F(x-1)).$$

La fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \frac{1}{2} (2xF'(x^2+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2} (2xf(x^2+1) - f(x-1)) = xf(x^2+1) - \frac{f(x-1)}{2}.$$

Exercice 5. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. Puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 1, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$.

On alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.

1. Soit $I = \int_0^1 x^3 e^{3x} dx$.

On réalise une intégration par parties en posant $u(x) = x^3$, $v'(x) = e^{3x}$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \left[\frac{1}{3} x^3 e^{3x} \right]_0^1 - \int_0^1 x^2 e^{3x} dx = \frac{e^3}{3} - \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

On réalise une nouvelle intégration par parties en posant $u(x) = x^2$, $v'(x) = e^{3x}$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3} x^2 e^{3x} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{3x} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

Enfin, on effectue une dernière intégration par parties en posant $u(x) = x$, $v'(x) = e^{3x}$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et on obtient

$$I = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} x e^{3x} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{27} [e^{3x}]_0^1 = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{27} e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27} e^3 + \frac{2}{27}.$$

2. Soit $I = \int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$.

On réalise une intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}$, $v(x) = \sin(x)$, $u(x) = -e^{-x}$, $v'(x) = \cos(x)$ et on obtient

$$I = [-\sin(x)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \cos(x) dx = -\sin(1)e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} \cos(x) dx.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}$, $v(x) = \cos(x)$, $u(x) = -e^{-x}$, $v'(x) = -\sin(x)$ et on obtient

$$I = -\sin(1)e^{-1} + [-e^{-x} \cos(x)]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx = -\sin(1)e^{-1} - e^{-1} \cos(1) + 1 - I$$

d'où

$$2I = 1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))$$

et finalement $I = \frac{1 - e^{-1}(\cos(1) + \sin(1))}{2}$.

3. Soit $I = \int_0^1 t^2 \arctan(t) dt$.

On réalise une intégration par parties en posant $u'(t) = t^2$, $v(t) = \arctan(t)$, $u(t) = \frac{t^3}{3}$, $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et on obtient

$$I = \left[\frac{t^3 \arctan(t)}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{t^3}{1+t^2} = t \times \frac{t^2}{1+t^2} = t \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) = t - \frac{t}{1+t^2}$ donc par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{1 - \ln(2)}{2}$$

donc

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln(2) - 1}{6}.$$

Exercice 7.

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \ln^2(t) dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \ln^2(x)$ sur \mathbb{R}_+^* qui s'annule en 1.

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t)$, $v'(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v(t) = t \ln(t) - t$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} F(x) &= [\ln(t)(t \ln(t) - t)]_1^x - \int_1^x (\ln(t) - 1) dt \\ &= \ln(x)(x \ln(x) - x) - \int_1^x \ln(t) dt + x - 1 \\ &= x \ln(x)(\ln(x) - 1) - [t \ln(t) - t]_1^x + x - 1 \\ &= x \ln(x)(\ln(x) - 1) - x \ln(x) + x - 1 + x - 1 \\ &= x \ln(x)(\ln(x) - 2) + 2x - 2. \end{aligned}$$

2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \sin(\sqrt[3]{t}) dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \sin(\sqrt[3]{x})$ sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. On effectue un changement de variables en posant $u = \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t = u^3$ d'où $dt = 3u^2 du$. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3 \int_0^{\sqrt[3]{x}} u^2 \sin(u) du.$$

On effectue une intégration par parties en posant $x(u) = u^2, y'(u) = \sin(u), x'(u) = 2u, y(u) = -\cos(u)$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 3[-u^2 \cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} + 6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} u \cos(u) du = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} u \cos(u) du.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $x(u) = u, y'(u) = \cos(u), x'(u) = 1, y(u) = \sin(u)$ et on obtient

$$F(x) = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6[u \sin(u)]_0^{\sqrt[3]{x}} - 6 \int_0^{\sqrt[3]{x}} \sin(u) du = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x} \sin(\sqrt[3]{x}) - 6[-\cos(u)]_0^{\sqrt[3]{x}}$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = -3x^{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x} \sin(\sqrt[3]{x}) + 6 \cos(\sqrt[3]{x}) - 6.$

3. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x t \ln(t) dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto x \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* qui s'annule en 1.

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(t), v'(t) = t, u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{t^2}{2}$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(x) = \left[\frac{t^2 \ln(t)}{2} \right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^x = \frac{x^2}{4} (2 \ln(x) - 1) + \frac{1}{4}.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 \neq 0$ car le discriminant de ce trinôme du second degré est strictement négatif. Posons pour tout réel $x, f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}.$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$ est l'unique primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{dt}{(\frac{t+1}{2})^2 + 1}.$

On effectue un changement de variable en posant $u = \frac{t+1}{2}$ d'où $du = \frac{dt}{2}$ ou encore $dt = 2du$ et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R},$

$$F(x) = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} \frac{2du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} [\arctan(u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{x+1}{2}} = \frac{\arctan(\frac{x+1}{2}) - \arctan(\frac{1}{2})}{2}.$$

5. (a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1, 1].$ D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'unique primitive de f sur $[-1, 1]$ qui s'annule en 0 est

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt.$$

On effectue le changement de variable $u = \arccos(t) \Leftrightarrow t = \cos(u)$ d'où $dt = -\sin(u) du.$

Ainsi, on a pour tout $x \in [-1, 1],$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} -\sqrt{1-\cos^2(u)} \sin(u) du = \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(u)} \sin(u) du.$$

Or, pour tout $x \in [-1, 1], \arccos(x) \in [0, \pi]$ et pour tout $u \in [0, \pi], \sin(u) \geq 0$ donc $\sqrt{\sin^2(u)} = |\sin(u)| = \sin(u)$ d'où pour tout $x \in [-1, 1],$

$$F(x) = \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) du = \frac{1}{2} \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2u)) du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos(x) - \frac{1}{4} [\sin(2u)]_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}}$$

d'où

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(2 \arccos(x)) - \frac{1}{2} \arccos(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin(\arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \frac{1}{2} \arccos(x)$$

donc finalement pour tout $x \in [-1, 1]$, $F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arccos(x)$.

- (b) La fonction $g : x \mapsto \sqrt{9-4x^2}$ est définie si $9-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Ainsi, g est définie et continue sur $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ et d'après le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \mapsto \int_0^x \sqrt{9-4t^2} dt$ est l'unique primitive de g qui s'annule en 0.

On a pour tout $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $G(x) = 3 \int_0^x \sqrt{1-\frac{4}{9}t^2} dt$. On effectue un changement de variable en posant $u = \frac{2}{3}t$ d'où $du = \frac{2}{3}dt$, puis $dt = \frac{3}{2}du$ et on obtient pour tout $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$,

$$G(x) = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{2}{3}x} \sqrt{1-u^2} du = \frac{9}{2} F\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{9\pi}{8} + \frac{3}{2}x \sqrt{1-\frac{4}{9}x^2} - \frac{9}{4} \arccos\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Exercice 8.

1. Tout d'abord, notons que les deux intégrales sont bien définies car pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) + \sin(t) \neq 0$. En effet, on a

$$\cos(t) + \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\sin(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{2} + t[2\pi] \text{ ou } t \equiv -\frac{\pi}{2} - t[2\pi]$$

d'où $t \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui est impossible pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Posons le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ d'où $du = -dt$ dans l'intégrale C . On obtient

$$C = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - u)}{\cos(\frac{\pi}{2} - u) + \sin(\frac{\pi}{2} - u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\sin(u) + \cos(u)} du = S.$$

2. Par linéarité de l'intégrale, on a $C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.

Or, $C = S$ donc $\frac{\pi}{2} = C + S = 2C$ d'où $C = S = \frac{\pi}{4}$.

3. (a) Tout d'abord, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est bien définie si $1-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$.

Par ailleurs, vérifions que pour tout $t \in [-1, 1]$, $t + \sqrt{1-t^2} \neq 0$. On a

$$t + \sqrt{1-t^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-t^2} = -t \Rightarrow 1-t^2 = t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, pour $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t + \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2} \neq 0$ et pour $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t + \sqrt{1-t^2} = 0$ donc la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est définie sur $[-1, 1] \setminus \{-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. A fortiori, elle est définie et continue sur $[0, 1]$ donc l'intégrale I est bien définie.

- (b) Posons $u = \arcsin(t) \Leftrightarrow t = \sin(u)$ d'où $dt = \cos(u)du$. On obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{1-\sin^2(u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + \sqrt{\cos^2(u)}} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u) + |\cos(u)|} du.$$

Or, pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(u) \geq 0$ donc $|\cos(u)| = \cos(u)$ donc $I = C = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 9. Tout d'abord, notons que les deux intégrales de cet exercice sont bien définies car pour tout réel x , $3 + 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$, ce qui est impossible.

1. On a
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1 + 4 \cos^2(x)} dx$$

On pose $u = \cos(x)$ d'où $du = -\sin(x)dx$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx = - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1 + 4u^2} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1 + (2u)^2}.$$

On pose maintenant $t = 2u$, d'où $dt = 2du$ et on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} [\arctan(t)]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \arctan(\sqrt{2})$$

car $\arctan(-\sqrt{2}) = -\arctan(\sqrt{2})$ par imparité de \arctan .

2. On a
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{5 - 4 \sin^2(x)} dx.$$

On pose $u = \sin(x)$ d'où $du = \cos(x)dx$ et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{5 - 4u^2}.$$

Or, pour tout $u \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, on a $\frac{1}{5 - 4u^2} = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2u)(\sqrt{5} + 2u)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5} + 2u} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2u} \right)$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3 + 2 \cos(2x)} dx &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5} + 2u} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{5} - 2u} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left[\frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} + 2u) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \left[\frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} - 2u) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\ &= \frac{\ln(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \ln(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{4\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Exercice 10.

1. Notons que l'intégrale est bien définie car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t^2 + t^4 > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4}$ est impaire donc $\int_{-1}^1 \frac{t^3}{1 + t^2 + t^4} dt = 0$.

2. Notons que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $1 + \sin(\theta) \neq 0$ donc l'intégrale est bien définie.

Posons $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ d'où $dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{\theta}{2}))d\theta = \frac{1}{2}(1 + t^2)d\theta$, i.e. $d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}$.

On sait qu'alors $\sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}$ (cf. TD Trigonométrie) et on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin(\theta)} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1 + t^2 + 2t} = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{(1 + t)^2} = 2 \left[-\frac{1}{1 + t} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin(\theta)} d\theta = 2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \right) = 2 \times \frac{3 + \sqrt{3} - 3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ est définie sur $] -\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. En particulier, elle est définie et continue sur $[2, 3]$ donc l'intégrale est bien définie.

Posons $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow u^2 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)u^2 = x+1 \Rightarrow x = \frac{1+u^2}{u^2-1}$ donc

$$dx = \frac{2u(u^2-1) - 2u(1+u^2)}{(u^2-1)^2} du = -\frac{4u}{(u^2-1)^2} du$$

et on obtient

$$\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{4u^2}{(u^2-1)^2} du = 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{(u^2-1)^2} du.$$

Réalisons une intégration par parties en posant $x(u) = u, y'(u) = \frac{u}{(u^2-1)^2}, x'(u) = 1, y(u) = -\frac{1}{2(u^2-1)}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= 4 \left(\left[-\frac{u}{2(u^2-1)} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2-1} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \right) \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + [\ln(u-1) - \ln(u+1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}-1) - \ln(\sqrt{3}+1) - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

Exercice 11. On sait que f est continue sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f est bornée sur le segment $[0, 1]$ donc il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |I_n| = \left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq \int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq M \int_0^1 x^n dx = M \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 12. • Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, alors l'hypothèse implique que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$

d'où par linéarité de l'intégrale $\int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx = 0$.

Or, pour tout $x \in [a, b], f(x) \leq |f(x)|$ donc $|f(x)| - f(x) \geq 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est continue sur $[a, b]$ car f et la fonction valeur absolue le sont.

La fonction $x \mapsto |f(x)| - f(x)$ est donc une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs positives et d'intégrale nulle sur $[a, b]$. On en déduit qu'elle est identiquement nulle sur $[a, b]$, i.e. pour tout $x \in [a, b], |f(x)| - f(x) = 0$ d'où pour tout $x \in [a, b], f(x) = |f(x)|$.

A fortiori, la fonction f est positive sur $[a, b]$.

• Si $\int_a^b f(x) dx \leq 0$, alors l'hypothèse implique que $-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$ d'où par

linéarité de l'intégrale $\int_a^b (|f(x)| + f(x)) dx = 0$.

Or, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq -|f(x)|$ donc $|f(x)| + f(x) \geq 0$.

Comme dans le premier cas, la fonction $x \mapsto |f(x)| + f(x)$ est une fonction continue, à valeurs positive et d'intégrale nulle sur $[a, b]$. Elle y est donc identiquement nulle, i.e. pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| + f(x) = 0$, d'où pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = -|f(x)|$.

A fortiori, la fonction f est négative sur $[a, b]$.

Dans tous les cas, la fonction f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 13.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

où $a = 0, b = 1$ et $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

On reconnaît une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) x\right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{4}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2}.$$

2. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$ d'où

$$v_n \sim \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

où $a = 0, b = \pi$ et $f : x \mapsto (2 + \cos(x))^2$. On reconnaît une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[0, \pi]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \int_0^\pi (2 + \cos(x))^2 dx \\ &= \int_0^\pi (4 + 4 \cos(x) + \cos^2(x)) dx \\ &= \int_0^\pi 4 dx + \int_0^\pi 4 \cos(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2x) + 1) dx \\ &= 4\pi + 4[\sin(x)]_0^\pi + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$