

18.1 Géométrie du plan

Dans toute cette section, on se place dans le plan \mathbb{R}^2 donc les points M sont repérés par leurs coordonnées (x_M, y_M) , où x_M est appelé l'abscisse de M et y_M l'ordonnée de M .

18.1.1 Vecteurs du plan

Définition 1: Vecteurs du plan

On appelle vecteur du plan tout déplacement d'un point A du plan vers un point B du plan.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont des points du plan, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est le vecteur nul.

Plus généralement, un vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^2 est la donnée de coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$. La norme du vecteur \vec{u} est alors définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}.$$

Remarque 1. • Le vecteur nul $\vec{0}$ est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Un vecteur \overrightarrow{AB} est entièrement caractérisé par sa direction (la droite (AB)), son sens (de A vers B) et sa norme $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Par définition, la longueur du segment $[AB]$ est $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Proposition 1

Etant donné un vecteur \vec{u} et un point O du plan \mathbb{R}^2 , il existe un et un seul point M du plan tel que

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}.$$

Démonstration. On note les coordonnées de \vec{u} et M de la façon suivante : $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $O(x_O, y_O)$.

Soit $M \in \mathbb{R}^2$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - x_O \\ y_M - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_O = x_{\vec{u}} \\ y_M - y_O = y_{\vec{u}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_O + x_{\vec{u}} \\ y_M = y_O + y_{\vec{u}} \end{cases},$$

ce qui détermine le point M de façon unique. ■

Remarque 2. Autrement dit, le déplacement \vec{u} peut être représenté par des couples de points différents, mais dès lors que le point de départ est fixé, le point d'arrivée l'est aussi.

Par exemple, si on considère les points $A(2, -3)$, $B(-1, 1)$, $C(2, 0)$ et $D(-1, 4)$ alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

et ces vecteurs ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Définition 2: Opérations sur les vecteurs

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

- (Addition) On définit la somme $\vec{u} + \vec{v}$ par

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}.$$

- (Multiplication par un réel) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le vecteur $\lambda \cdot \vec{u}$ par

$$\lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $-2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Remarque 3. On remarque que pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Proposition 2: Propriétés des opérations sur les vecteurs

- (Commutativité de l'addition) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- (Existence d'un élément neutre) Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.
- (Associativité de l'addition) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^2)^3$, $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- (Existence de l'opposé) Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} + (-1) \cdot \vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
- (Distributivité de la multiplication par un réel par rapport à l'addition)
Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}.$$

- Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u} \quad \text{et} \quad (\lambda\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}).$$

Démonstration. Dans toute la preuve, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x_{\vec{w}} \\ y_{\vec{w}} \end{pmatrix}$. On considère également des réels λ et μ .

1. On a $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} + x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \vec{v} + \vec{u}$.
2. On a $\vec{u} + \vec{0} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \vec{u}$ et l'autre égalité découle de la commutativité montrée dans l'alinéa précédent.
3. On a

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} + x_{\vec{w}} \\ y_{\vec{v}} + y_{\vec{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} + x_{\vec{w}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} + y_{\vec{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{w}} \\ y_{\vec{w}} \end{pmatrix} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$

4. On a $-1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -x_{\vec{u}} \\ -y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} + (-1) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} - x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} - y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

5. On a $1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \times x_{\vec{u}} \\ 1 \times y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \vec{u}$.

6. On a

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda(x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}) \\ \lambda(y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{v}} \\ \lambda y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}.$$

7. On a

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_{\vec{u}} \\ (\lambda + \mu)y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}.$$

Par ailleurs, on a

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda\mu x_{\vec{u}} \\ \lambda\mu y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_{\vec{u}} \\ \mu y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}).$$

■

Remarque 4. • Toutes ces propriétés font de \mathbb{R}^2 un espace vectoriel.

• En pratique, on note $\lambda\vec{u}$ plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$. Ainsi, on note $-\vec{u}$ au lieu de $-1 \cdot \vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{u}$ plutôt que $\vec{u} + (-\vec{u})$.

Exemple 2. Pour tout couple (A, B) de points du plan \mathbb{R}^2 , on remarque que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

$$\text{En effet, } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Proposition 3: Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan \mathbb{R}^2 .

Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Démonstration. Notons $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ les coordonnées des points A, B et C .

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} ont alors pour coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$.

Par somme, on trouve que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_B - x_A + x_C - x_B \\ y_B - y_A + y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}.$$

■

Remarque 5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Définition 3: Vecteurs colinéaires

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan \mathbb{R}^2 .

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

Remarque 6. • Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de \mathbb{R}^2 puisque pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

• Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

En effet, si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires tels qu'il existe un réel μ tel que $\vec{v} = \mu \vec{u}$, puisque $\vec{v} \neq \vec{0}$, nécessairement $\mu \neq 0$ donc

$$\vec{u} = \frac{1}{\mu} \mu \vec{u} = \frac{1}{\mu} \vec{v},$$

d'où le résultat en posant $\lambda = \frac{1}{\mu}$.

Exemple 3. • Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Proposition 4: Condition de colinéarité

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$, i.e. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$.

Démonstration. • Supposons que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$.

On alors $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$ d'où $ad - bc = \lambda ab - \lambda ab = 0$.

• Supposons que $ad - bc = 0$ et montrons que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors \vec{v} est nécessairement colinéaire à \vec{u} .

On peut donc supposer que $\vec{u} \neq \vec{0}$, i.e. $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Si $a = 0$, nécessairement $b \neq 0$ et on peut poser $\lambda = \frac{d}{b}$, d'où $d = \lambda b$.

Puisque $ad - bc = 0$, on a alors $bc = ad$ d'où $c = \frac{ad}{b} = \lambda a$.

Ainsi $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \vec{u}$.

- Si $a \neq 0$, on pose $\lambda = \frac{c}{a}$ et on trouve de même $d = \frac{bc}{a} = \lambda b$ d'où $\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \vec{u}$.

Dans tous les cas, si $ad - bc = 0$, alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. ■

Exemple 4. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $5 \times 1 - 3 \times 1 \neq 0$.

Définition 4: Points alignés

Soient A, B et C trois points du plan \mathbb{R}^2 .

On dit que les points A, B et C sont alignés si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Exemple 5. Les points $A(1, -3)$, $B(2, 1)$ et $C(3, 5)$ sont alignés car $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

18.1.2 Produit scalaire

Définition 5: Produit scalaire sur \mathbb{R}^2

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan \mathbb{R}^2 .

On définit le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Remarque 7. Le produit scalaire sur \mathbb{R}^2 est donc une application définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Exemple 6. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$.

Définition 6: Vecteurs orthogonaux

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan \mathbb{R}^2 .

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque 8. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Exemple 7. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Proposition 5: Propriétés du produit scalaire

1. (Symétrie) Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

2. (Bilinéarité) Pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^2)^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{w} \cdot (\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}.$$

3. (Positivité) Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$.

4. (Définition) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Remarque 9. On déduit du caractère défini positif du produit scalaire que si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Démonstration.

Dans toute la preuve, on fixe des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$.

1. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \end{pmatrix}$ donc

$$(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\lambda x + x'x'' + (\lambda y + y')y'' = \lambda(xx'' + yy'') + (x'x'' + y'y'') = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Par symétrie, on a $\vec{w} \cdot (\lambda\vec{u} + \vec{v}) = (\lambda\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \lambda\vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$.

3. On a $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 \geq 0$.
4. On a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$.

Définition 7: Norme euclidienne

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On définit la norme euclidienne du vecteur \vec{u} par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarque 10. Par positivité du produit scalaire, on a bien $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, ce qui légitime la définition de $\|\vec{u}\|$. En outre, $\|\vec{u}\| \geq 0$.

Définition 8: Vecteurs orthonormés

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan \mathbb{R}^2 .

On dit que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthonormés s'ils sont orthogonaux et si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Exemple 8. • Les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthonormés.

Proposition 6: Identités remarquables

Pour tout couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) dans \mathbb{R}^2 , on a :

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
2. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Démonstration. Soient (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs dans \mathbb{R}^2 .

1. On a par bilinéarité du produit scalaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

2. On a par bilinéarité du produit scalaire :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

3. On a par bilinéarité du produit scalaire :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

Proposition 7: Identités de polarisation

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs dans \mathbb{R}^2 .

Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Démonstration. La preuve découle directement des identités remarquables.

Remarque 11. Ces identités permettent de retrouver le produit scalaire de deux vecteurs moyennant la connaissance de certaines normes.

Proposition 8: Identité du parallélogramme

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs dans \mathbb{R}^2 .

Alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

Démonstration. La preuve découle directement des identités remarquables. ■

Remarque 12. Géométriquement, cette égalité signifie que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des quatre côtés de ce parallélogramme.

Proposition 9: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs dans \mathbb{R}^2 .

Alors

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Démonstration. Si \vec{v} est nul, les deux membres de l'inégalité sont nuls donc l'inégalité (qui est même une égalité) est vérifiée.

Supposons donc que $\vec{v} \neq \vec{0}$ et notons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = (\vec{u} + \lambda\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \lambda\vec{v}).$$

Par positivité du produit scalaire, $P(\lambda) \geq 0$ pour tout réel λ .

Par ailleurs, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$P(\lambda) = \lambda^2 \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 + 2\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{u}\|^2.$$

C'est un trinôme du second degré en λ (puisque $\|\vec{v}\| \neq 0$) de signe constant donc son discriminant est négatif, ce qui s'écrit

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \leq 0,$$

d'où

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

En prenant la racine des deux côtés, on obtient :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Montrons maintenant le cas d'égalité.

Supposons qu'il y ait égalité. Alors le discriminant du trinôme est nul, c'est à dire qu'il admet une racine double λ tel que $(\vec{u} + \lambda\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \lambda\vec{v}) = 0$. Par définition du produit scalaire, ceci implique que $\vec{u} + \lambda\vec{v} = 0$, i.e. $\vec{u} = -\lambda\vec{v}$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Réciproquement, supposons que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, i.e. il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (ceci est loisible car $\vec{v} \neq 0$).

Alors

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{v}| = |\lambda|(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

et

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = \|\lambda\vec{v}\| \|\vec{v}\| = \sqrt{(\lambda\vec{v}) \cdot (\lambda\vec{v})} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\lambda^2(\vec{v} \cdot \vec{v})} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = |\lambda|(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

On a donc bien égalité si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. ■

Proposition 10: Propriétés de la norme

1. (Séparation) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
2. (Homogénéité) Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|.$$

3. (Inégalité triangulaire) Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

Démonstration.

1. On a les équivalences

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0},$$

où la dernière équivalence découle du caractère défini du produit scalaire.

2. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda\vec{u}) \cdot (\lambda\vec{u})} = \sqrt{\lambda^2(\vec{u} \cdot \vec{u})} = |\lambda|\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\lambda|\|\vec{u}\|.$$

3. Soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs de \mathbb{R}^2 .

On a

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ , on obtient

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2} \leq \sqrt{(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2} = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

Montrons le cas d'égalité. Si $\vec{v} = \vec{0}$, l'inégalité triangulaire est une égalité et il existe bien $\lambda \in \mathbb{R}_+$, en l'occurrence $\lambda = 0$, tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

On suppose donc dorénavant que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

- Supposons que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

En reprenant la démonstration de l'inégalité triangulaire, on voit que ceci équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. En particulier, il y a donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (puisque $\vec{v} \neq \vec{0}$).

On a ainsi $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \vec{u} \cdot \vec{v} = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda\|\vec{v}\|^2$. Puisque $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\|\vec{v}\|^2 > 0$ donc $\lambda = \frac{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \geq 0$.

Ainsi, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, avec $\lambda \geq 0$, ce qui prouve que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

- Réciproquement, supposons que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens, c'est à dire qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (toujours parce que $\vec{v} \neq \vec{0}$). On a alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda\|\vec{v}\|^2 = |\lambda|\|\vec{v}\|\|\vec{v}\| = \|\lambda\vec{v}\|\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|,$$

d'où l'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Proposition 11: Angle géométrique

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan \mathbb{R}^2 .

Il existe un unique angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Le réel θ est appelé angle géométrique entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Démonstration. Puisque \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont strictement positives.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $-\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ d'où en divisant par $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| > 0$, on obtient

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1.$$

Puisque la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$. ■

Corollaire 1

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan. Soit θ l'angle géométrique entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

Remarque 13. • Si deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont orthogonaux, on a $0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cos(\theta)$.

Nécessairement, $\cos(\theta) = 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, deux vecteurs orthogonaux sont de directions perpendiculaires.

• Si deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires, il existe un réel non nul λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. On a alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{u}) = \lambda \|\vec{u}\|^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \|\vec{u}\| \|\lambda \vec{u}\| \cos(\theta) = |\lambda| \|\vec{u}\|^2 \cos(\theta)$$

donc $\cos(\theta) = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \pm 1$. Ainsi, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, ce qui prouve que deux vecteurs colinéaires sont de directions parallèles.

En particulier, si trois points A, B et C sont alignés, c'est à dire si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, les droites (AB) et (AC) sont confondues.

Proposition 12: Théorème de Pythagore

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan \mathbb{R}^2 .

Alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Démonstration. On a l'identité remarquable $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

On a donc l'équivalence :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

Remarque 14. Si $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on a $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ d'après la relation de Chasles. Ainsi, on a l'équivalence

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Autrement dit, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

18.1.3 Bases et repères du plan

Définition 9: Bases du plan

Une base du plan \mathbb{R}^2 est la donnée d'un couple de vecteurs (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de \mathbb{R}^2 non colinéaires. Une telle base est dite orthonormée si les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthonormés.

Remarque 15. • Le vecteur nul étant colinéaire à tous les vecteurs de \mathbb{R}^2 , une base de \mathbb{R}^2 est nécessairement constituée de deux vecteurs non nuls.

• Deux vecteurs non nuls et orthogonaux forment toujours une base de \mathbb{R}^2 . En effet, si $\vec{e}_1 \neq \vec{0}, \vec{e}_2 \neq \vec{0}$, et $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, alors les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 ne sont pas colinéaires.

S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel λ non nul tel que $\vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_1$ d'où

$$0 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot (\lambda \vec{e}_1) = \lambda (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = \lambda \|\vec{e}_1\|^2 \neq 0,$$

ce qui est absurde.

Ainsi, deux vecteurs orthogonaux non nuls ne sont pas colinéaires et forment une base de \mathbb{R}^2 .

Exemple 9. • Notons \vec{i} et \vec{j} les vecteurs de coordonnées $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$ donc ils forment une base du plan \mathbb{R}^2 , appelée base canonique de \mathbb{R}^2 . De plus, c'est une base orthonormée.

• Le couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) vus dans l'exemple précédent, i.e. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme donc une base de \mathbb{R}^2 .

Théorème 1: Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base du plan \mathbb{R}^2 .

Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^2 .

Alors il existe un unique couple de réels (λ_1, λ_2) tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2.$$

On dit que les réels (λ_1, λ_2) sont les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Démonstration. Notons $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (qui sont en fait les coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique de \mathbb{R}^2).

Cherchons un couple (λ_1, λ_2) de réels tel que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 c = \alpha \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Puisque les vecteurs (\vec{e}_1, \vec{e}_2) forment une base de \mathbb{R}^2 , ils ne sont pas colinéaires donc $ad - bc \neq 0$, i.e. la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est de déterminant non nul, donc elle est inversible.

On en déduit que l'unique solution du système est le couple (λ_1, λ_2) donné par

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

ce qui assure l'existence et l'unicité des coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . ■

Exemple 10. • Reprenons la base canonique de $\mathbb{R}^2(\vec{i}, \vec{j})$ définie par $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 , on a $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}$.

Ainsi, les coordonnées de \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$.

• Soit (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base définie par $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées (λ_1, λ_2) de \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . On a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 & = & 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -1 & = & 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \xLeftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{cases} 3 & = & 2\lambda_1 \\ -1 & = & 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{3}{2} \\ \lambda_2 & = & -\frac{11}{2} \end{cases}.$$

Ainsi $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{e}_1 - \frac{11}{2}\vec{e}_2$.

Définition 10: Repère du plan

On appelle repère du plan \mathbb{R}^2 la donnée d'un triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où O est un point de \mathbb{R}^2 et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base de \mathbb{R}^2 .

On dit que le repère est orthonormé si (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .

Exemple 11. Si on note O l'origine du plan, i.e. le point $(0, 0)$, $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique, (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère du plan \mathbb{R}^2 .

Définition 11: Coordonnées d'un point dans un repère

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan \mathbb{R}^2 . Soit M un point du plan \mathbb{R}^2 .

On appelle coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les coordonnées (λ_1, λ_2) de \overrightarrow{OM} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , i.e. l'unique couple de réels (λ_1, λ_2) tel que

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2.$$

Remarque 16. Lorsqu'on note les coordonnées d'un point M sous la forme (x, y) où x désigne l'abscisse du point M et y son ordonnée, les coordonnées (x, y) sont en fait les coordonnées du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où O désigne l'origine du plan \mathbb{R}^2 , i.e. le point $(0, 0)$, et (\vec{i}, \vec{j}) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

En effet, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exemple 12. Reprenons les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui forment une base (\vec{u}, \vec{v}) de \mathbb{R}^2 .

Soit $O = (2, 5)$. Le triplet (O, \vec{u}, \vec{v}) forme donc un repère de \mathbb{R}^2 .

Soit M le point du plan \mathbb{R}^2 de coordonnées $(4, 4)$.

Alors $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\vec{e}_1 - \frac{11}{2}\vec{e}_2$.

Les coordonnées de M dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) sont donc $\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

Définition 12: Déterminant dans une base

Soit (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base de \mathbb{R}^2 . Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

On appelle déterminant du couple (\vec{u}, \vec{v}) dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Proposition 13: Condition de colinéarité

On garde les notations de la définition précédente.

Alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$.

Remarque 17. Ceci signifie que la condition de colinéarité vue précédemment dans la base canonique est en fait vraie dans toutes les bases.

Démonstration. • Supposons que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u} = \lambda a\vec{e}_1 + \lambda b\vec{e}_2$.

Par unicité des coordonnées dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , on a $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$ d'où

$$ad - bc = \lambda ab - \lambda ab = 0.$$

• Supposons que $ad - bc = 0$ et montrons que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors \vec{v} est nécessairement colinéaire à \vec{u} .

On peut donc supposer que $\vec{u} \neq \vec{0}$, i.e. $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Si $a = 0$, nécessairement $b \neq 0$ et on peut poser $\lambda = \frac{d}{b}$, d'où $d = \lambda b$.

Puisque $ad - bc = 0$, on a alors $bc = ad$ d'où $c = \frac{ad}{b} = \lambda a$.

Ainsi $\vec{v} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 = \lambda a\vec{e}_1 + \lambda b\vec{e}_2 = \lambda\vec{u}$.

- Si $a \neq 0$, on pose $\lambda = \frac{c}{a}$ et on trouve de même $d = \frac{bc}{a} = \lambda b$ d'où

$$\vec{v} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 = \lambda a\vec{e}_1 + \lambda b\vec{e}_2 = \lambda\vec{u}.$$

Dans tous les cas, si $ad - bc = 0$, alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. ■

Proposition 14: Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base orthonormée de \mathbb{R}^2 . Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives (a, b) et (c, d) dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$.

Démonstration. Par hypothèse, on a $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ et $\vec{v} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$.

Puisque la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est orthonormée, on a

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \|\vec{e}_1\|^2 = \|\vec{e}_2\|^2 = 1.$$

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \cdot (c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) = ac\|\vec{e}_1\|^2 + ad(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + bc(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + bd\|\vec{e}_2\|^2 = ac + bd. \quad \blacksquare$$

Exemple 13. Soit $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le couple (\vec{e}_1, \vec{e}_2) forme une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .

Soit $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{e}_1 + 2\sqrt{2}\vec{e}_2$ et $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{e}_1 - 2\sqrt{2}\vec{e}_2$.

D'après la proposition précédente, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = 2 - 8 = -6$.

En effet, on a $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On retrouve bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + (-1) \times 3 = -3 - 3 = -6$.

Remarque 18. Soit \vec{u} un vecteur non nul du plan, soit \vec{u}' un vecteur non nul orthogonal à \vec{u} tel que $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \frac{\pi}{2}$. Le couple $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{u}'}{\|\vec{u}'\|} \right)$ forme une base orthonormée du plan \mathbb{R}^2 .

Soit \vec{v} un vecteur non nul du plan. Soit θ l'angle géométrique entre \vec{u} et \vec{v} .

Alors $\vec{v} = \|\vec{v}\| \cos(\theta) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \|\vec{v}\| \sin(\theta) \frac{\vec{u}'}{\|\vec{u}'\|}$ et $\vec{u} = \|\vec{u}\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + 0 \times \frac{\vec{u}'}{\|\vec{u}'\|}$.

D'après la proposition précédente, on obtient

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

On retrouve la formule du produit scalaire avec le cosinus.

18.1.4 Droites dans le plan

Définition 13: Droites du plan

Soit A un point du plan \mathbb{R}^2 , soit \vec{u} un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 .

La droite de vecteur directeur \vec{u} et passant par A est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

Remarque 19. Si une droite (D) admet un vecteur directeur \vec{u} , alors tout vecteur non nul \vec{v} colinéaire à \vec{u} est également un vecteur directeur de la droite (D) .

En effet, si \overrightarrow{AM} est colinéaire à \vec{u} , alors il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ et si \vec{v} et \vec{u} sont colinéaires, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \mu\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AM} = \lambda\mu\vec{v}$.

Ainsi, \overrightarrow{AM} est colinéaire à \vec{u} si et seulement si \overrightarrow{AM} est colinéaire à \vec{v} , donc la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} est la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{v} .

En particulier, si B est un autre point de (D) , alors le vecteur \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de (D) .

Définition 14: Droites parallèles

Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{u}' .

On dit que les droites (D) et (D') sont parallèles si les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires.

Proposition 15: Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle. Soit M un point situé sur la droite (AB) et N un point situé sur la droite (AC) .

On suppose que la droite (BC) est parallèle à la droite (MN) .

Alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Démonstration. Tout d'abord, notons que puisque les points A, B et C forment un triangle, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires (sinon, les points A, B et C seraient alignés). Ainsi, le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme une base de \mathbb{R}^2 .

Puisque les points A, M et B sont alignés, les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires donc il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$.

De même, puisque les points A, N et C sont alignés, les vecteurs \overrightarrow{AN} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires donc il existe un réel β tel que $\overrightarrow{AN} = \beta \overrightarrow{AC}$.

Enfin, puisque les droites (BC) et (MN) sont parallèles, les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{MN} sont colinéaires, donc il existe un réel γ tel que $\overrightarrow{MN} = \gamma \overrightarrow{BC}$.

D'après la relation de Chasles, on en déduit que

$$\overrightarrow{MN} = \gamma(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\gamma \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}.$$

D'autre part, toujours d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ donc

$$\overrightarrow{MN} = -\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}.$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que $-\alpha = -\gamma$ et $\beta = \gamma$, d'où $\alpha = \beta = \gamma$.

Or, $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$ donc $AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \|\alpha \overrightarrow{AB}\| = |\alpha| \|\overrightarrow{AB}\| = |\alpha| AB$ d'où $|\alpha| = \frac{AM}{AB}$.

On a de même $|\beta| = \frac{AN}{AC}$ et $|\gamma| = \frac{MN}{BC}$.

Puisque $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, on en conclut que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. ■

Corollaire 2: Réciproque du théorème de Thalès

Soient A, B, C, M, N cinq points du plan distincts.

On suppose que les points A, M et B d'une part, et A, N et C d'autre part sont alignés et dans cet ordre.

On suppose que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

En outre, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Démonstration. Considérons la droite (D) de vecteur directeur \overrightarrow{BC} et passant par M . Notons N' son point d'intersection avec la droite (AC) (ce point existe puisque les droites (BC) et (AC) ne sont pas parallèles). De plus, les points A, N' et C sont alignés dans le même ordre que A, M et B car d'après la preuve du théorème de Thalès, si λ est le réel tel que $\overrightarrow{AN'} = \lambda \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Ainsi, la droite (MN') est parallèle à la droite (BC) . D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC} = \frac{MN'}{BC}$.

Il s'ensuit que $AN' = \frac{AM \times AC}{AB} = AN$. Il y a alors deux possibilités : $N' = N$ ou A est le milieu de $[NN']$. Mais ce deuxième cas est impossible car N et N' sont tous deux situés entre A et C . Nécessairement, $N' = N$.

Ainsi, la droite (MN) est parallèle à la droite (BC) et d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. ■

Remarque 20. On en déduit le théorème de la droite des milieux : si on note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$, alors $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$ donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Proposition 16: Représentation paramétrique d'une droite dans le plan

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan \mathbb{R}^2 , soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 .

Soit (D) la droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} .

Soit M un point de \mathbb{R}^2 de coordonnées (x, y) .

Alors $M \in (D)$ si et seulement si il existe un réel λ tel que
$$\begin{cases} x = \lambda a + x_A \\ y = \lambda b + y_A. \end{cases}$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda a + x_A \\ y = \lambda b + y_A. \end{cases}$$

■

Exemple 14. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, soit A le point du plan de coordonnées $(2, 3)$. Soit (D) la droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} .

Alors un point M du plan de coordonnées (x, y) appartient à la droite (D) si et seulement si il existe un réel λ tel que
$$\begin{cases} x = 5\lambda + 2 \\ y = 3\lambda + 3 \end{cases}$$

Par exemple, pour $\lambda = 1$, on trouve que le point de coordonnées $(7, 6)$ appartient à (D) .

Pour $\lambda = -2$, le point de coordonnées $(-8, -3)$ appartient à (D) .

Définition 15: Vecteur normal à une droite

Soit (D) une droite du plan \mathbb{R}^2 de vecteur directeur \vec{u} .

On appelle vecteur normal à la droite (D) tout vecteur non nul \vec{n} tel que \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux.

Exemple 15. Si on reprend la droite (D) de l'exemple précédent, le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (D) .

Remarque 21. Les vecteurs normaux à une droite du plan sont tous colinéaires. En effet, soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Déterminons les vecteurs normaux non nuls à la droite (D) . Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un tel vecteur.

On a $\vec{n} \cdot \vec{u} = ax + by = 0$. Puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, nécessairement, $(a, b) \neq (0, 0)$.

• Si $a = 0$, on trouve que $by = 0$ et puisque dans ce cas $b \neq 0$, ceci implique que $y = 0$.

Dans ce cas, \vec{n} est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc les vecteurs normaux à la droite (D) sont colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc au vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

• Si $a \neq 0$, on obtient $x = -\frac{b}{a}y$ et \vec{n} est de la forme $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$ donc les vecteurs normaux à la droite (D) sont colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$, donc au vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Dans tous les cas, les vecteurs normaux à une droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont tous colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si une droite (D) admet pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et si \vec{u} est un vecteur directeur de la droite (D) , alors \vec{u} est colinéaire à $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Proposition 17: Equation cartésienne d'une droite du plan

Soit (D) une droite du plan \mathbb{R}^2 . Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul normal à la droite (D) .

Alors il existe un réel c tel que pour tout point M de \mathbb{R}^2 de coordonnées (x, y) ,

$$M \in (D) \Leftrightarrow ax + by + c = 0.$$

On dit que l'équation $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite (D) .

Démonstration. Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur directeur de (D) , soit A un point de (D) de coordonnées (x_A, y_A) .

Par définition, le point M appartient à (D) si et seulement si \overrightarrow{AM} est colinéaire à \vec{u} , i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$. Dans ce cas, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{n} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$.

Réciproquement, d'après la remarque précédente, si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors \overrightarrow{AM} est colinéaire à $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, qui est un vecteur directeur de (D) .

On a donc les équivalences

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0,$$

ce qui équivaut en posant $c = -ax_A - by_A$ à $ax + by + c = 0$. ■

Remarque 22. • Une équation cartésienne de droite dans le plan \mathbb{R}^2 est donc une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

• Puisque tous les vecteurs normaux à (D) sont colinéaires, la droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes égales à multiplication par un scalaire non nul.

• Une droite verticale a une équation de la forme $x = -c$, i.e. $x + c = 0$ ou encore $ax + by + c = 0$ avec $a = 1$ et $b = 0$.

• Une droite horizontale a une équation de la forme $y = -\frac{c}{b}$, i.e. $by + c = 0$ ou encore $ax + by + c = 0$ avec $a = 0$ et $b \neq 0$.

• Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by = c$ peut s'écrire $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. On retrouve l'équation d'une fonction affine de coefficient directeur $-\frac{a}{b}$ et d'ordonnée à l'origine $-\frac{c}{b}$.

Exemple 16. On reprend le même exemple de la droite (D) de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Elle admet une équation cartésienne de la forme $-3x + 5y + c = 0$.

Or, elle passe par le point A de coordonnées $(2, 3)$ donc $-3 \times 2 + 5 \times 3 + c = 0$ d'où $c = -9$.

Une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $-3x + 5y - 9 = 0$.

Remarque 23. Soient (D) et (D') deux droites du plan d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Les points d'intersection des deux droites (D) et (D') ont pour coordonnées les couples (x, y) solutions du système

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

On a vu dans le chapitre « Systèmes linéaires » qu'un tel système admet zéro, une seule, ou une infinité de solutions. Ainsi, deux droites du plan sont soit parallèles, soit sécantes en un point, soit confondues.

Proposition 18

Soit (D) une droite de \mathbb{R}^2 d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Alors le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D) .

Démonstration. Soit $A(x_0, y_0)$ un point de (D) . Les coordonnées de A vérifient l'équation de (D) donc $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a les équivalences suivantes :

$$M \in (D) \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = ax_0 + by_0 + c \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Or, le vecteur \overrightarrow{AM} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ donc \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires si et seulement si $a(x - x_0) - (-b)(y - y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

On a donc prouvé que M appartient à la droite (D) si et seulement si \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires, ce qui implique que \vec{u} est un vecteur directeur de la droite (D) . ■

Remarque 24. Si on se donne une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (D) donc celle-ci admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Définition 16: Coefficient directeur d'une droite

Soit (D) une droite de \mathbb{R}^2 d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et de vecteur directeur

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si $b \neq 0$, on définit le coefficient directeur (ou pente) de la droite (D) par le réel $-\frac{a}{b}$.

Remarque 25. • Si $a = 0$, la droite (D) est horizontale et son coefficient directeur est nul.

• Si $b = 0$, la droite (D) est verticale et dans ce cas, le coefficient directeur de la droite (D) n'est pas défini (on peut dire qu'il est infini).

Exemple 17. Soit (D) une droite de \mathbb{R}^2 d'équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$. Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc le coefficient directeur de cette droite est $-\frac{2}{3}$.

18.1.5 Projection orthogonale sur une droite

Proposition 19: Projection orthogonale sur une droite

Soit (D) une droite de vecteur directeur \vec{u} .

Soit M un point du plan \mathbb{R}^2 .

Alors il existe un unique point H appartenant à la droite (D) tel que les vecteurs \overrightarrow{HM} et \vec{u} sont orthogonaux.

Le point H est appelé le projeté orthogonal du point M sur la droite (D) .

Démonstration. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Une équation cartésienne de (D) est $ax + by + c = 0$.

Soit M un point du plan \mathbb{R}^2 de coordonnées (x_M, y_M) . On cherche un point $H \in (D)$ tel que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$.

Soit H un point de coordonnées (x, y) . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} H \in (D) \\ \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -b(x_M - x) + a(y_M - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = -c \\ bx - ay = bx_M - ay_M \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ bx_M - ay_M \end{pmatrix}$.

Or, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ est inversible puisque son déterminant vaut $-a^2 - b^2 < 0$ car $(a, b) \neq (0, 0)$. Le système obtenu est donc un système de Cramer, ce qui signifie qu'il possède une unique solution.

Il y a donc un unique point H qui vérifie les deux conditions $H \in (D)$ et $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$. ■

Exemple 18. Soit (D) une droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$. Soit M le point de coordonnées $(1, 1)$. On vérifie que $M \notin (D)$. Déterminons le projeté orthogonal $H(x, y)$ de M sur la droite (D) .

Puisque $H \in (D)$, on a $2x - y = -3$. D'autre part, un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$, on a $(1 - x) + 2(1 - y) = 0$, d'où $x + 2y = 3$.

Ainsi, le couple (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x + 4x + 6 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}.$$

Le projeté orthogonal du point M sur la droite (D) est donc le point H de coordonnées $(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5})$.

Remarque 26. Soient A, B et M trois points du plan. Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) . On a alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \times AH$ si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont de même sens et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -AB \times AH$ si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont de sens opposé.

Définition 17: Distance d'un point à une droite du plan

Soit (D) une droite du plan. Soit M un point de \mathbb{R}^2 et H le projeté orthogonal du point M sur la droite (D) .

On appelle distance du point M à la droite (D) la longueur HM .

On note $d(M, (D)) = HM$.

Exemple 19. Reprenons l'exemple précédent. La distance du point M à la droite (D) est alors

$$HM = \sqrt{(x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

18.1.6 Cercles dans le plan

Définition 18: Cercles

Soit O un point du plan. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle cercle de centre O et de rayon r l'ensemble des points M du plan tels que

$$OM = r.$$

Exemple 20. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

Proposition 20: Equation cartésienne d'un cercle dans le plan

Soit $O(x_O, y_O)$ un point du plan. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon r .

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) .

Alors $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$.

On dit que cette équation est une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} .

Démonstration. On a les équivalences :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OM = r \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2.$$

■

Exemple 21. Le cercle de centre $O(-2,1)$ et de rayon 3 a pour équation

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Le point de coordonnées $(1, 1)$ appartient en particulier à ce cercle.

18.2 Géométrie de l'espace

Dans cette section, on reprend les concepts vus dans le plan \mathbb{R}^2 et on les étend à l'espace \mathbb{R}^3 .

18.2.1 Vecteur de l'espace

Définition 19: Vecteurs de l'espace

On appelle vecteur de l'espace tout déplacement d'un point A de l'espace vers un point B de l'espace.

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont des points de l'espace, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est le vecteur nul.

Plus généralement, un vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^3 est la donnée de coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$. La norme du vecteur \vec{u} est alors définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 + z_{\vec{u}}^2}.$$

Les propriétés vues sur les vecteurs du plan restent valables pour les vecteurs de l'espace : les opérations sur les vecteurs, les propriétés des opérations sur les vecteurs, la relation de Chasles, la colinéarité.

18.2.2 Produit scalaire

Définition 20: Produit scalaire sur \mathbb{R}^3

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 .

On définit le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

On définit comme dans \mathbb{R}^2 les vecteurs orthogonaux et on montre de même les propriétés du produit scalaire (symétrie, bilinéarité, positivité, définition).

Définition 21: Norme euclidienne

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On définit la norme euclidienne du vecteur \vec{u} par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On définit comme sur \mathbb{R}^2 les vecteurs orthonormés, la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 vérifie les mêmes identités remarquables, de polarisation, du parallélogramme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les mêmes propriétés de séparation, homogénéité et l'inégalité triangulaire.

Enfin, le théorème de Pythagore sur \mathbb{R}^3 s'énonce et se démontre de la même manière.

18.2.3 Bases et repères de l'espace

Définition 22: Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 .

On dit que les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires s'il existe trois réels $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ tels que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Concrètement, cela signifie que l'un des trois vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres.

Remarque 27. Par exemple, si $\alpha \neq 0$, on a $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}$.

Exemple 22. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires car $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Pour trouver une telle relation, on trouve les triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ en résolvant le système

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Définition 23: Bases de l'espace

Une base de l'espace \mathbb{R}^3 est la donnée d'un triplet de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 non coplanaires, c'est à dire tels que

$$\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Une telle base est dite orthonormée si les trois vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont orthonormés, i.e. orthogonaux deux à deux et de norme 1.

Remarque 28. Un triplet de vecteurs contenant le vecteur nul ne forme jamais une base de l'espace car ces trois vecteurs sont coplanaires. En effet, si \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs quelconques de l'espace, il existe un triplet de réels $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, par exemple $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ tel que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{0} = \vec{0}.$$

Exemple 23. • Notons $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs de coordonnées $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que ces vecteurs forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , appelée base canonique de \mathbb{R}^3 .

• Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrons que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base de l'espace \mathbb{R}^3 , i.e. ne sont pas coplanaires.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ \alpha + \frac{1}{2}\alpha + \alpha = 0, \end{cases}$

ce qui équivaut à $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment bien une base de \mathbb{R}^3 .

Théorème 2: Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de l'espace \mathbb{R}^3 .

Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Alors il existe un unique triplet de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

On dit que les réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Démonstration. Ce théorème est admis momentanément. On en donnera une preuve plus générale dans le chapitre « Espaces vectoriels ».

Nous pouvons toutefois d'ores et déjà démontrer l'unicité si existence du triplet de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Supposons qu'il existe deux triplets de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \lambda'_1\vec{e}_1 + \lambda'_2\vec{e}_2 + \lambda'_3\vec{e}_3$$

donc $(\lambda_1 - \lambda'_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\vec{e}_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$.

Puisque les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ne sont pas coplanaires, nécessairement,

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = 0, \lambda_2 - \lambda'_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 - \lambda'_3 = 0.$$

Ainsi, $\lambda_1 = \lambda'_1$ puis $\lambda_2 = \lambda'_2$, et $\lambda_3 = \lambda'_3$ d'où l'unicité (si existence) des coordonnées d'un vecteur dans une base de \mathbb{R}^3 . ■

Exemple 24. • Reprenons la base canonique de $\mathbb{R}^3(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ définie par $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 , on a $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$.

Ainsi, les coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$.

• Reprenons la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'exemple précédent. Soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Cherchons les coordonnées du vecteur \vec{x} dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$\text{On a } \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha + \gamma = 3 \\ \alpha - \beta - \gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ \gamma = 3 - \alpha \\ \alpha - \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} - 3 + \alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2. \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$.

Définition 24: Repère de l'espace

On appelle repère de l'espace \mathbb{R}^3 la donnée d'un triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où O est un point de \mathbb{R}^3 et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de \mathbb{R}^3 .

On dit que le repère est orthonormé si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

Exemple 25. Si on note O l'origine de l'espace, i.e. le point $(0, 0, 0)$, $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs de la base canonique, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère du plan \mathbb{R}^3 .

Définition 25: Coordonnées d'un point dans un repère

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère de l'espace \mathbb{R}^3 . Soit M un point du plan \mathbb{R}^3 .

On appelle coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ les coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de \overrightarrow{OM} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, i.e. l'unique triplet de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

Remarque 29. Lorsqu'on note les coordonnées d'un point M sous la forme (x, y, z) où x désigne l'abscisse du point M , y son ordonnée et z sa cote, les coordonnées (x, y, z) sont en fait les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O désigne l'origine de l'espace \mathbb{R}^3 , i.e. le point $(0, 0, 0)$, et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

En effet, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Exemple 26. Soit M le point de l'espace de coordonnées $(3, 3, -2)$. Soit $O(0, 0, 0)$. On considère le repère de l'espace $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est la base de l'espace \mathbb{R}^3 utilisée dans les exemples précédents.

Les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $(1, 1, 2)$.

Proposition 21: Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration. Par hypothèse, on a $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$.
Puisque la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée, on a

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) \\ &= xx'\|\vec{e}_1\|^2 + xy'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + xz'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + yy'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + yz'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) + zx'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) \\ &\quad + zy'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) + zz'\|\vec{e}_3\|^2 \\ &= xx' + yy' + zz'.\end{aligned}$$

■

Corollaire 3: Coordonnées dans une base orthonormée

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .
Pour tout vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^3 , on a

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

Démonstration. Notons (x, y, z) les coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de telle sorte que $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Les coordonnées de \vec{e}_1 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont $(1, 0, 0)$ donc d'après la proposition précédente, on en déduit que $\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = x$.

De même, les coordonnées de \vec{e}_2 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont $(0, 1, 0)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = y$.

Enfin, les coordonnées de \vec{e}_3 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont $(0, 0, 1)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{e}_3 = z$.

Ainsi, $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$. ■

18.2.4 Droites et plans dans l'espace**Définition 26: Plans de l'espace**

Soit A un point de l'espace \mathbb{R}^3 , soient (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs non colinéaires de l'espace.

On appelle plan passant par A et de base (\vec{u}, \vec{v}) l'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

On dit que le triplet (A, \vec{u}, \vec{v}) forme un repère du plan et le couple (\vec{u}, \vec{v}) une base du plan.

Remarque 30. Trois points non alignés A, B et C définissent un unique plan (P) . En effet, si A, B et C ne sont pas alignés, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires donc le plan (P) est le plan passant par le point A et de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Lemme 1: Existence de bases orthonormées dans un plan de l'espace

Soit (P) un plan de l'espace.

Alors (P) admet une base orthonormée.

Démonstration. Soit (\vec{u}, \vec{v}) une base du plan (P) . Posons $\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Le vecteur \vec{e}_1 est de norme 1.

Cherchons un réel λ tel que le vecteur $\vec{v} + \lambda\vec{e}_1$ soit orthogonal à \vec{e}_1 . On a

$$(\vec{v} + \lambda\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{e}_1 + \lambda\|\vec{e}_1\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\vec{v} \cdot \vec{e}_1.$$

Posons $\vec{e}_2' = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1$, puis $\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{\|\vec{e}_2'\|}$.

Les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont bien orthonormés, a fortiori, ils ne sont pas colinéaires.

Montrons que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est bien une base du plan (P) . Soit A un point du plan (P) .

Considérons le plan (P') passant par le point A et de base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) . On a les équivalences suivantes :

$$M \in (P') \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

puisque \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont des combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v} et réciproquement.

Ainsi le couple (\vec{e}_1, \vec{e}_2) forme bien une base orthonormée de (P) . ■

Proposition 22: Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace \mathbb{R}^3 , soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs

non colinéaires de \mathbb{R}^3 .

Soit (P) le plan passant par A et de base (\vec{u}, \vec{v}) .

Soit M un point de \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, z) .

Alors $M \in (P)$ si et seulement si il existe deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} x = \lambda a + \mu a' + x_A \\ y = \lambda b + \mu b' + y_A \\ z = \lambda c + \mu b' + z_A. \end{cases}$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in (P) &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = \lambda a + \mu a' + x_A \\ y = \lambda b + \mu b' + y_A \\ z = \lambda c + \mu b' + z_A. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 27. Soit $A(1, 2, 3)$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soit (P) le plan passant par A et de base (\vec{u}, \vec{v}) .

Alors un point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) appartient au plan (P) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu + 1 \\ y = -\lambda + \mu + 2 \\ z = -2\mu + 3. \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on trouve par exemple que le point M de coordonnées $(0, 0, 5)$ appartient au plan (P) .

Définition 27: Vecteur normal à un plan

Soit (P) un plan de base (\vec{u}, \vec{v}) . Soit \vec{n} un vecteur non nul de l'espace \mathbb{R}^3 .
On dit que \vec{n} est un vecteur normal au plan (P) si $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition 28: Plans parallèles

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

Proposition 23

Soit (P) un plan de base (\vec{u}, \vec{v}) et de vecteur normal \vec{n} .
Alors les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forment une base de \mathbb{R}^3 .

Démonstration. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n} = \vec{0}$.
En prenant le produit scalaire avec \vec{n} , on obtient

$$0 = \vec{0} \cdot \vec{n} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n}) \cdot \vec{n} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{n} + \beta\vec{v} \cdot \vec{n} + \gamma\vec{n} \cdot \vec{n} = \gamma\|\vec{n}\|^2.$$

Or, $\|\vec{n}\|^2 > 0$ car $\vec{n} \neq \vec{0}$ donc nécessairement $\gamma = 0$.

Il en résulte que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Or, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} forment une base de (P) , a fortiori ils ne sont pas colinéaires donc $\alpha = \beta = 0$.

Finalement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forment une base de \mathbb{R}^3 . ■

Proposition 24: Equation cartésienne d'un plan de l'espace

Soit (P) un plan de l'espace \mathbb{R}^3 passant par un point A . Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (P) .

Alors il existe un réel d tel que pour tout point M de \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, z) ,

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0.$$

On dit que l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

Démonstration. Soient (\vec{u}, \vec{v}) deux vecteurs de \mathbb{R}^3 qui forment une base du plan (P) .
Puisque \vec{n} est un vecteur normal au plan (P) , on a $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

• Montrons l'équivalence $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Supposons que $M \in (P)$.

Par définition, il existe des réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{n} + \mu\vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. D'après la proposition précédente, les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forment une base de l'espace donc il existe trois réels $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n}.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \alpha\vec{u} \cdot \vec{n} + \beta\vec{v} \cdot \vec{n} + \gamma\|\vec{n}\|^2 = \gamma\|\vec{n}\|^2 = 0$$

donc $\gamma = 0$ puisque $\|\vec{n}\|^2 > 0$ (car $\vec{n} \neq \vec{0}$).

Ainsi $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in (P)$.

• Montrons maintenant que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}, ax + by + cz + d = 0$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0\end{aligned}$$

en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$. ■

Exemple 28. Soit (P) un plan de \mathbb{R}^3 admettant pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par le point A de coordonnées $(1, 2, -5)$.

Le plan (P) admet une équation cartésienne de la forme

$$2x - z + d = 0.$$

Puisque les coordonnées de A doivent vérifier cette équation, on obtient $2 + 5 + d = 0$ d'où $d = -7$.

Finalement, une équation cartésienne du plan (P) est $2x - z - 7 = 0$.

Définition 29: Droites de l'espace

Soit A un point du plan \mathbb{R}^3 , soit \vec{u} un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 .

La droite de vecteur directeur \vec{u} et passant par A est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

Proposition 25: Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace \mathbb{R}^3 , soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 .

Soit (D) la droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} .

Soit M un point de \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, z) .

Alors $M \in (D)$ si et seulement si il existe un réel λ tel que
$$\begin{cases} x = \lambda a + x_A \\ y = \lambda b + y_A \\ z = \lambda c + z_A \end{cases}$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda a + x_A \\ y = \lambda b + y_A \\ z = \lambda c + z_A \end{cases}$$

Remarque 31. Soit (D) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par le point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) .

Soit (P) le plan de \mathbb{R}^3 d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$. On sait que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (P) .

Soient (\vec{u}, \vec{v}) une base orthonormée du plan (P) . On a montré que les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ formaient une base de \mathbb{R}^3 .

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) .

$$\text{On a l'équivalence } M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

• En effet, si $M \in (D)$, alors \overrightarrow{AM} est colinéaire à \vec{n} , donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{n}$. Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

• Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$.

Puisque les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forment une base de \mathbb{R}^3 , il existe des réels uniques $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{n}$.

Puisque $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$, on a $\alpha \|\vec{u}\|^2 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha = 0$. De même, puisque $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$, on a $\beta \|\vec{v}\|^2 + \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \beta = 0$.

Donc $\overrightarrow{AM} = \gamma \vec{n}$, i.e. \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont colinéaires, ce qui implique que $M \in (D)$.

Si on note les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$, on a montré l'équivalence suivante :

$$M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} a'(x - x_A) + b'(y - y_A) + c'(z - z_A) = 0 \\ a''(x - x_A) + b''(y - y_A) + c''(z - z_A) = 0. \end{cases}$$

En posant $d' = -a'x_A - b'y_A - c'z_A$ et $d'' = -a''x_A - b''y_A - c''z_A$, on a obtenu le résultat suivant.

Proposition 26: Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace

Soit (D) une droite de l'espace. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

Alors il existe des réels $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^8$ tels que

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

où les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple 29. Considérons la droite (D) de l'espace dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ x - y = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - 1 \\ y = x + 1, \end{cases}$$

Ainsi, un point de coordonnées (x, y, z) appartient à la droite (D) si et seulement si ses coordonnées sont de la forme

$$(x, y, z) = (x, x + 1, 2x - 1) = x(1, 1, 2) + (0, 1, -1),$$

où x est un réel quelconque.

Ceci signifie que la droite (D) est la droite passant par le point $(0, 1, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puisqu'elle admet une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = 2\lambda - 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 32. Concrètement, une droite de l'espace est obtenue comme intersection de deux plans non parallèles.

Enfin donnons la définition suivante :

Définition 30: Droite parallèle à un plan

Soit (D) une droite de l'espace et (P) un plan de l'espace.
On dit que (D) est parallèle à (P) si un vecteur directeur de (D) est orthogonal à un vecteur normal au plan (P) .

Exemple 30. La droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $(1, 1, 1)$ est parallèle au plan (P) d'équation $x + y = 1$ (mais n'est pas contenue dans le plan (P)).

18.2.5 Projection orthogonale sur un plan

Définition 31: Projection orthogonale sur un plan

Soit (P) un plan de l'espace muni d'une base orthonormée (\vec{u}, \vec{v}) .
Soit M un point de l'espace.
Alors il existe un unique point H appartenant au plan (P) tel que le vecteur \overrightarrow{HM} soit orthogonal aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
Le point H est appelé le projeté orthogonal du point M sur le plan (P) .

Démonstration. Soit A un point du plan (P) .

Montrons que le point H tel que $\overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v})\vec{v}$ convient.

Tout d'abord, le point H ainsi défini appartient clairement à (P) puisque le vecteur \overrightarrow{AH} s'exprime comme combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .

Ensuite, on a

$$\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0.$$

De même,

$$\overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} - \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} - \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0.$$

Ainsi, le point H convient. Montrons que c'est l'unique point qui convient.

Soit H' un autre point du plan (P) tel que le vecteur $\overrightarrow{H'M}$ soit orthogonal aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées du point H' dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v}) , i.e. $\overrightarrow{AH'} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
On a alors l'équivalence :

$$\overrightarrow{H'M} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH'}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} - \overrightarrow{AH'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} - \lambda = 0,$$

d'où $\lambda = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$.

En utilisant le fait que $\overrightarrow{H'M} \cdot \vec{v} = 0$, on montre de même que $\mu = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AH'} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v})\vec{v} = \overrightarrow{AH}$, ce qui implique que $H = H'$ d'où l'unicité de H . ■

Définition 32: Distance d'un point à un plan de l'espace

Soit (P) un plan de l'espace. Soit M un point de \mathbb{R}^3 et H le projeté orthogonal du point M sur le plan (P) .

On appelle distance du point M au plan (P) la longueur HM .

On note $d(M, (P)) = HM$.