Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°7
Samedi 17 mai 2024 (4h00)

Exercice : Fonctions lipschitziennes

1. Soit $a \in I$. Par hypothèse, on a pour tout $x \in I, 0 \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant k|x-a|$.
   Or, $\lim\limits_{x\to a} |x-a| = 0$ donc on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$, i.e. $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ puis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ce qui assure que la fonction f est continue en a.
   Puisque ceci est vrai pour tout point $a \in I$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$
2. (a) • Supposons que f soit k-lipschitzienne sur I. Soit $a \in I$.
   Alors pour tout $x \in I$ avec $x \neq a$, on a $|f(x)-f(a)| \leqslant k|x-a|$ d'où $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant k$.
   Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient en utilisant que f est dérivable en a et par continuité de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$,
   $$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = \left|\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = |f'(a)| \leqslant k$$
   et ceci est vrai pour tout point $a \in I$ donc pour tout $x \in I, |f'(x)| \leqslant k$.
   • Réciproquement, supposons que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leqslant k$ et montrons que f est k-lipschitzienne sur I.
   Soient $(x, y) \in I^2$.
   Si $x = y$, on a bien $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ car les deux membres de l'inégalité sont nuls.
   On peut donc supposer $x \neq y$ et même, sans perte de généralité, $x < y$.
   Puisque la fonction f est dérivable sur I, alors elle est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$ d'où $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ puis en passant à la valeur absolue :
   $$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leqslant k|x-y|$$
   car, par hypothèse, pour tout $c \in I, |f'(c)| \leqslant k$.
   On a donc bien prouvé que pour tout $(x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$, ce qui prouve que f est k-lipschitzienne sur I.

   (b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f' est bornée sur $[a, b]$.
   On en déduit qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in [a, b], |f'(x)| \leqslant k$.
   D'après la question précédente, ceci implique que $\boxed{f \text{ est } k\text{-lipschitzienne sur } [a, b].}$
3. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$.
   Initialisation : pour $n = 0$, $k^0 |u_0 - l| = |u_0 - l|$ donc la propriété est triviale.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $|u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$.
Montrons que $|u_{n+1} - l| \leqslant k^{n+1}|u_0 - l|$.
On a

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leqslant k|u_n - l| \leqslant k \times k^n |u_0 - l| = k^{n+1}|u_0 - l|,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant k^n|u_0 - l|.}$
Or, puisque $0 \leqslant k < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ donc par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - l| = 0,$$

i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - l = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l.}$

(b) Supposons que la fonction f admette un autre point fixe l'.
En appliquant le même raisonnement qu'à la question précédente, on montre de même que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l'| \leqslant k^n|u_0 - l'|$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $l = l'$, ce qui prouve que

$$\boxed{f \text{ admet un unique point fixe sur } I.}$$

Problème 1 : Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$.
   - Calculons $\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt$ en effectuant une intégration par parties. Pour cela, on pose $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = \cos(k\pi t), v(t) = \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$ et on obtient

$$\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = \left[\frac{t\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi t)dt = \left[\frac{\cos(k\pi t)}{k^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2\pi^2}$$

   donc $\boxed{\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}.}$

   - Calculons $\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt$ en effectuant une intégration par parties. Pour cela, on pose $u(t) = t^2, u'(t) = 2t, v'(t) = \cos(k\pi t), v(t) = \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$ et on obtient

$$\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = \left[\frac{t^2\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 t\sin(k\pi t)dt = -\frac{2}{k\pi}\int_0^1 t\sin(k\pi t)dt.$$

   On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = -\sin(k\pi t), v(t) = \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}$ et on obtient

$$\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = \frac{2}{k\pi}\left[\frac{t\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)dt = \frac{2\cos(k\pi)}{k^2\pi^2} - \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1$$

   donc $\boxed{\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2}.}$

2. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt = a\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt + b\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt = \frac{(-1)^k(2a+b)-b}{k^2\pi^2}.$$

On veut $\left\{\begin{array}{rcl} 2a+b & = & 0 \\ -b & = & \pi^2 \end{array}\right.$ de telle sorte que $\dfrac{(-1)^k(2a+b)-b}{k^2\pi^2} = \dfrac{1}{k^2}$ d'où $\boxed{b=-\pi^2}$ puis $\boxed{a = \dfrac{\pi^2}{2}}$.

3. Par linéarité de l'intégrale, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(k\pi t)\right)dt &= \frac{a}{2}\int_0^1 t^2dt + \frac{b}{2}\int_0^1 tdt + \sum_{k=1}^n \int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)dt \\
&= \frac{a}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \frac{b}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{a}{6}+\frac{b}{4}+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\
&= \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}.}
\end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\theta \in]0,\pi[$.
On a

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n (\cos(2k\theta)+i\sin(2k\theta))\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{2ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n (e^{2i\theta})^k\right).$$

Puisque $\theta \in]0,\pi[$, on a $2\theta \in]0,2\pi[$ donc $e^{2i\theta} \neq 1$. On reconnaît donc une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (e^{2i\theta})^k &= e^{2i\theta}\frac{1-(e^{2i\theta})^n}{1-e^{2i\theta}} \\
&= e^{2i\theta}\frac{1-e^{2in\theta}}{1-e^{2i\theta}} \\
&= e^{2i\theta}\frac{e^{in\theta}(e^{-in\theta}-e^{in\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})} \\
&= e^{i(n+1)\theta}\frac{-2i\sin(n\theta)}{-2i\sin(\theta)} \\
&= (\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta))\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(2k\theta) = \frac{\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ d'où

$$1+2\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = 1+\frac{2\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)+2\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Or, $2\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta) = \sin((n+1)\theta+n\theta)-\sin((n+1)\theta-n\theta) = \sin((2n+1)\theta)-\sin(\theta)$
d'où $\boxed{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}}$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Puisque f et $t \mapsto \sin(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut réaliser une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt &= \left[-\frac{f(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(f(0)-f(1)\cos(\lambda)+\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right).\end{aligned}$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la fonction f' est continue sur $[0,1]$ donc $t \mapsto f'(t)\cos(\lambda t)$ est continue sur le segment $[0,1]$.
D'après le théorème des bornes atteintes, cette fonction est donc bornée sur le segment $[0,1]$.
On en déduit qu'il existe un réel M positif tel que pour tout $t \in [0,1], |f'(t)\cos(\lambda t)| \leqslant M$ d'où

$$\left|\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right| \leqslant \int_0^1 |f'(t)\cos(\lambda t)|dt \leqslant \int_0^1 Mdt = M.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left|f(0)-f(1)\cos(\lambda)+\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right| &\leqslant |f(0)|+|f(1)\cos(\lambda)|+\left|\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt\right| \\ &\leqslant |f(0)|+|f(1)|+M\end{aligned}$$

donc la fonction $\lambda \mapsto f(0)-f(1)\cos(\lambda)+\displaystyle\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui implique que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{f(0)-f(1)\cos(\lambda)+\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)dt}{\lambda} = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt = 0.}$

6. (a) Montrons que f admet une limite finie en 0.
On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{2} = 0$, donc par composition de limites, on obtient $\sin(\frac{\pi t}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{\pi t}{2}$.
Ainsi, $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi^2(t^2-2t)}{4\times\frac{\pi t}{2}} = \dfrac{\pi(t^2-2t)}{2t} = \dfrac{\pi}{2}(t-2) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\pi$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t) = -\pi$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = -\pi.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in]0,1[$. Alors $\dfrac{\pi t}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[\subset]0,\pi[$ donc en appliquant la question 4 pour $\theta = \dfrac{\pi t}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t) = \frac{1}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)\right) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{2\sin(\theta)} = \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi t}{2})}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\boxed{\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt} &= \int_0^1 \left(\frac{\pi^2}{2}t^2-\pi^2 t\right)\frac{\sin((2n+1)\frac{\pi t}{2})}{2\sin(\frac{\pi t}{2})}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\frac{\pi t}{2})}\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right)dt \\
&= \boxed{\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)dt}
\end{aligned}$$

où f est la fonction définie en question précédente.

7. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)\pi}{2}=+\infty$. Or, d'après la question 5, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt=0$ donc par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)dt=0$, puis grâce à la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt=0.$$

Or, d'après la question 3, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{6}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{6}=0$ d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Problème 2 : Méthode de Newton

Partie I : Formules de Taylor

1. Puisque $n+1\geqslant 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc la fonction f' est continue sur $[a,b]$ et on a pour tout $x\in[a,b]$, $f(x_0)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt=f(x_0)+[f(t)]_{x_0}^{x}=f(x_0)+f(x)-f(x_0)$ donc $\boxed{\forall x\in[a,b], f(x)=f(x_0)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt.}$

2. Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:« si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ ».

   •Initialisation :
   Pour $n=0$, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et d'après la question précédente, on a pour tout $x\in[a,b]$,

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)dt=\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(0+1)}(t)}{0!}(x-t)^0 dt$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a,b]$. A fortiori f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a,b]$, alors $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
On peut donc réaliser une intégration par parties en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t), u'(t) = f^{(n+2)}(t), v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}, v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ donc on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
On a donc bien montré que, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{\forall x \in [a,b], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.}$$

3. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée.
   On en déduit qu'il existe un réel M positif tel que $\boxed{\forall t \in [a,b], |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M.}$
4. Soit $x \in [a,b]$. D'après la question 2, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right|.$$

   • Si $x \geqslant x_0$, on a

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{|f^{(n-1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leqslant \frac{M}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{M}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x}$$

   d'où $\left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \dfrac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.
   • Si $x \leqslant x_0$, on a

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \int_{x}^{x_0} \frac{|f^{(n-1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leqslant \frac{M}{n!}\int_{x}^{x_0}(t-x)^n dt = \frac{M}{n!}\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{x}^{x_0}$$

   d'où $\left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \dfrac{M(x_0-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.
   Dans tous les cas, on a bien

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

Partie II : Principe de la méthode

1. Supposons par l'absurde qu'il existe deux réels c_1 et c_2 dans $]a,b[$, avec $c_1 < c_2$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = 0$.
   Puisque f est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$, d'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f'(c) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé.
   Donc $\boxed{f \text{ s'annule au plus une fois sur } [a,b].}$
2. La tangente à la courbe de f au point $(t, f(t))$ a pour équation $y = f'(t)(x-t) + f(t)$. Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0 \Leftrightarrow f'(t)(x-t) = -f(t)$.
   Or, par hypothèse, $f'(t) \neq 0$ donc ceci équivaut à $x - t = -\dfrac{f(t)}{f'(t)}$ puis $\boxed{x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}.}$
3. (a) Puisque $c \in]a,b[$, on a $c - a > 0$ et $b - c > 0$. Soit $r = \dfrac{1}{2}\min(c-a, b-c) > 0$.
   Par définition, $r \leqslant \dfrac{1}{2}(c-a) < c-a$ (car $c-a > 0$) donc $-r > a-c$ et $r \leqslant \dfrac{1}{2}(b-c) < b-c$ (car $b-c > 0$) donc $c-r > c+a-c = a$ et $c+r < c+b-c = b$, ce qui prouve que $\boxed{J_r = [c-r, c+r] \subset]a,b[.}$
   (b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$, donc sur J_r, alors f' et f'' sont continues sur J_r. Par composition avec la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur le segment J_r.
   D'après le théorème des bornes atteintes, elles y sont bornées et atteignent leurs bornes donc $|f''|$ admet un maximum sur J_r et $|f'|$ y admet un minimum, ce qui légitime la définition de s_r et i_r.
   Puisque i_r est le minimum atteint de $|f'|$ sur J_r, il existe un réel $x \in J_r \subset]a,b[$ tel que $i_r = |f'(x)|$. Or, par hypothèse, f' ne s'annule pas sur $]a,b[$ donc $f'(x) \neq 0$, d'où $|f'(x)| > 0$, i.e. $\boxed{i_r > 0}$.
   (c) Soit r_0 un réel strictement positif tel que $J_{r_0} \subset]a,b[$.
   Soit $r \in]0, r_0]$. Alors $J_r \subset J_{r_0} \subset]a,b[$ donc pour tout $x \in J_r$, puisque $x \in J_{r_0}$, on a $|f'(x)| \leqslant s_{r_0}$ donc en passant au maximum, $0 \leqslant s_r \leqslant s_{r_0}$.
   Par ailleurs, pour tout $x \in J_r$, puisque $x \in J_{r_0}, |f''(x)| \geqslant i_{r_0}$, donc en passant au minimum $i_r \geqslant i_{r_0}$, d'où par stricte positivité de i_r et $i_{r_0}, 0 < \dfrac{1}{ir} \leqslant \dfrac{1}{i_{r_0}}$, puis $0 < \dfrac{1}{2ir_r} \leqslant \dfrac{1}{2ir_0}$.
   En multipliant les deux inégalités qu'on vient d'obtenir, on trouve $0 \leqslant \dfrac{s_r}{2i_r} \leqslant \dfrac{s_{r_0}}{2i_{r_0}}$, autrement dit si $r \leqslant r_0, 0 \leqslant K_r \leqslant K_{r_0}$.
   Ainsi, en multipliant par $r > 0$, on obtient $0 \leqslant rK_r \leqslant rK_{r_0}$.
   Or, $\lim\limits_{r \to 0} rK_{r_0} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que
   $$\lim_{r \to 0} rK_r = 0.$$
   Il existe donc nécessairement un réel r strictement positif tel que $\boxed{0 \leqslant rK_r < 1.}$
4. (a) Par définition de s_r, on a pour tout $x \in J_r, |f''(x)| \leqslant s_r$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment J_r et on obtient (en remplaçant x par c et x_0 par c_n qui appartiennent tous deux à J_r) :
   $$\boxed{|f(c) - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n)| \leqslant \frac{s_r|c - c_n|^2}{2}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
|c_{n+1}-c| &= \left|c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} - c\right| \\
&= \frac{1}{|f'(c_n)|}|f'(c_n)(c_n-c)-f(c_n)| \\
&= \frac{1}{|f'(c_n)|}|f(c)-f(c_n)-f'(c_n)(c-c_n)| \quad (\text{car } f(c)=0) \\
&\leqslant \frac{1}{|f'(c_n)|}\frac{s_r|c-c_n|^2}{2} \quad (\text{d'après la question précédente}).
\end{aligned}$$

Or, puisque $c_n \in J_r, |f'(c_n)| \geqslant i_r$ donc, puisque f' ne s'annule pas, $\dfrac{1}{|f'(c_n)|} \leqslant \dfrac{1}{i_r}$ d'où

$$\boxed{|c_{n+1}-c| \leqslant \frac{s_r}{2i_r}|c-c_n|^2 = K_r|c_n-c|^2.}$$

On a supposé que $c_n \in J_r = [c-r, c+r]$ donc $|c_n - c| \leqslant r$.
Il en découle que $|c_{n+1}-c| \leqslant r^2K_r = r(rK_r) < r$ car $r > 0$ et $rK_r < 1$ donc $\boxed{c_{n+1} \in J_r.}$

5. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
•Initialisation : Pour $n = 0, c_0 \in J_r$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n \in J_r$. La question précédente montre que si $c_n \in J_r$, alors $c_{n+1} \in J_r$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Par principe de récurrence, on a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n \in J_r.}$
Puisque $J_r \subset]a, b[$ qui est le domaine de définition de f et de f', on peut donc bien calculer pour tout $n \in \mathbb{N}, f(c_n)$ et $f'(c_n)$. Par ailleurs, puisque f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, donc sur J_r, la quantité $\dfrac{f(c_n)}{f'(c_n)}$ a bien un sens pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\text{la suite } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

6. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}$.
•Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\dfrac{(K_r|c_0-c|)^{2^0}}{K_r} = \dfrac{K_r|c_0-c|}{K_r} = |c_0 - c| \geqslant |c_0 - c|$ donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.
•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $|c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}$ et montrons que $|c_{n+1}-c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0-c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$.
En utilisant la question 4.(b) et l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$|c_{n+1}-c| \leqslant K_r|c_n-c|^2 \leqslant K_r \times \left(\frac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}\right)^2 = \frac{(K_r|c_0-c|)^{2^{n+1}}}{K_r},$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Par principe de récurrence, on a donc bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r}.}$
Puisque $c_0 \in J_r = [c-r, c+r]$, on a $|c_0 - c| \leqslant r$ donc $0 \leqslant K_r|c_0 - c| \leqslant rK_r < 1$.
• Si $K_r|c_0 - c| = 0$, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(K_r|c_0-c|)^{2^n}}{K_r} = 0$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n - c| = 0$.

• Si $0 < K_r|c_0 - c| < 1$, alors $(K_r|c_0 - c|)^{2^n} = e^{2^n \ln(K_r|c_0-c|)}$ avec $\ln(K_r|c_0 - c|) < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \ln(K_r|c_0 - c|) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (K_r|c_0 - c|)^{2^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{2^n \ln(K_r|c_0-c|)} = 0$$

donc par comparaison, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n - c| = 0$.

Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n - c| = 0$, ce qui implique que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c.}$

7.
```
def Newton(c0, f, df):
    n,c=0,c0
    while n<=50 and abs(f(c))>10**(-10):
        n=n+1
        c=c-f(c)/df(c)
    if n<=50:
        return c
    else:
        return
```