Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°7

Samedi 18 mai 2024 (4h00)

L'énoncé est constitué d'un exercice, de deux problèmes et comporte 4 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice : Fonctions lipschitziennes

Soit I un intervalle réel. Soit k un réel positif. On dit qu'une fonction est **k-lipschitzienne** sur l'intervalle I si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1. Montrer que si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.
2. (a) Soit f une fonction dérivable sur I, soit k un réel positif. Montrer que f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si pour tout $x \in I, |f'(x)| \leqslant k$.

   Indication : on pourra penser à utiliser le théorème des accroissements finis.

   (b) En déduire que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, il existe un réel positif k tel que f est k-lipschitzienne sur le segment $[a,b]$.
3. On suppose dans cette question que $f : I \longrightarrow I$ est une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I avec $k < 1$.

   On suppose en outre que f admet un point fixe $l \in I$, c'est à dire tel que $f(l) = l$.

   Soit $u_0 \in I$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

   (b) En conclure que l est l'unique point fixe de la fonction f sur I.

On peut en fait montrer qu'une telle fonction admet toujours un point fixe, a fortiori unique (théorème du point fixe de Picard).

Problème 1 : Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t\cos(k\pi t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t^2\cos(k\pi t)dt$.
2. Montrer qu'il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \int_0^1 (at^2 + bt)\cos(k\pi t)dt = \frac{1}{k^2}.$$

3. Avec ce couple (a,b), en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 (at^2 + bt)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t)\right) dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\theta \in]0,\pi[$, montrer que

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

5. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

6. (a) On considère la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(t) = \dfrac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\frac{\pi t}{2})}$.

   Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

   On admet que ce prolongement fait de la fonction f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (ceci nécessite un développement limité).

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt = \int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)dt.$

7. En utilisant les questions précédentes, conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 2 : Méthode de Newton

L'objectif de ce problème est de montrer la convergence de la méthode de Newton, dont le but est d'approcher l'unique point d'annulation d'une fonction dans un intervalle donné.
Autrement dit, si f est définie sur un intervalle I sur lequel la fonction f s'annule en un unique point c, on cherche à construire une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = c$.

Partie I : Formules de Taylor

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Soit $x_0\in[a,b]$ un réel fixé.
Dans toute cette partie, on considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. On rappelle que pour tout $k\in[\![0,n+1]\!]$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de f.

1. Montrer que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$.
2. En déduire que pour tout $x\in[a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \quad \textbf{(Formule de Taylor avec reste intégral)}$$

   Indication : on pourra procéder par récurrence sur l'entier naturel n.

3. Justifier qu'il existe un réel positif M tel que pour tout $t\in[a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$.
4. En déduire que

$$\forall x\in[a,b], \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textbf{(Inégalité de Taylor-Lagrange)}$$

Partie II : Principe de la méthode

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Dans toute cette partie, on considère une fonction $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$ telle que f' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1. Montrer que la fonction f s'annule au plus une fois sur $]a,b[$.
2. Soit $t\in]a,b[$. Montrer que la tangente à la courbe de f au point $(t,f(t))$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

Dans toute la suite, on suppose qu'il existe $c\in]a,b[$ (a fortiori unique) tel que $f(c)=0$.
Pour tout $r>0$, on pose $J_r = [c-r, c+r]$.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} c_0 \in]a,b[\\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n - \dfrac{f(c_n)}{f'(c_n)}. \end{cases}$$

Autrement dit, la méthode consiste à tracer la tangente à la courbe de f au point $(c_0, f(c_0))$, à trouver le réel c_1 en lequel la tangente coupe cet axe, puis à itérer ce procédé en étudiant ensuite l'intersection de la tangente à la courbe de f au point $(c_1, f(c_1))$ avec l'axe des abscisses et ainsi de suite.

Nous allons montrer que la suite ainsi obtenue approche le point d'annulation de f.

3. (a) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset]a,b[$.
   (b) Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset]a,b[$. Justifier que $s_r = \max\limits_{x\in J_r}|f''(x)|$ et $i_r = \min\limits_{x\in J_r}|f'(x)|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

   On note $K_r = \dfrac{s_r}{2i_r}$.

   (c) Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $0 \leqslant rK_r < 1$.
   On pourra commencer par montrer que si $r_0 > 0$ est tel que $J_{r_0} \subset]a,b[$, alors pour tout $r \in]0, r_0]$, $K_r \leqslant K_{r_0}$.

   On fixe dorénavant un réel $r > 0$ tel que $J_r \subset]a,b[$ et $0 \leqslant rK_r < 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n \in J_r$.
   (a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

   $$|f(c) - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n)| \leqslant \frac{s_r|c - c_n|^2}{2}.$$

   (b) En déduire que $|c_{n+1} - c| \leqslant K_r|c_n - c|^2$, puis que $c_{n+1} \in J_r$.

5. Montrer que si $c_0 \in J_r$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n \in J_r$ et en déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   On fixe dorénavant un réel $c_0 \in J_r$, de telle sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n \in J_r$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$.

7. On désigne dans cette question par `df` la fonction Python représentant f'. Ecrire une fonction Python `newton(c_0,f,df)` prenant en argument le réel c_0 et les fonctions f et f' et renvoyant, si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, une valeur approchée de c et la valeur `None` si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   On pourra convenir ici que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si on trouve un $n \leqslant 50$ tel que $|f(c_n)| < 10^{-10}$ et qu'elle diverge sinon.