

Problème 1 : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a } W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(\cos(x) - 1) dx.$$

Or, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n(x) \geq 0$ et $\cos(x) - 1 \leq 0$ donc $\cos^n(x)(\cos(x) - 1) \leq 0$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(\cos(x) - 1) dx \leq 0$ donc $W_{n+1} - W_n \leq 0$.

Ainsi, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \cos^{n+1}(x)$, $u'(x) = -(n+1)\sin(x)\cos^n(x)$, $v'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^{n+1}(x) dx \\ &= [\sin(x) \cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x)) \cos^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x) dx \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ d'où $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

3. • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

Pour $n = 0$, on a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \frac{(2 \times 0)!}{(2^0 0!)^2} = \frac{\pi}{2}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Montrons que la propriété est vraie au

rang $n + 1$, i.e. $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2}$.

D'après la question précédente, on a $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2(n+1)(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}$$

d'où $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}}$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Pour $n=0$, on a $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$ et $\frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. Montrons la propriété au rang $n+1$, i.e. $W_{2n+3} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

D'après la question précédente, on a $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \frac{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et d'après la question précédente, on a

$$(n+1)W_n W_{n+1} = (2k+1)W_{2k} W_{2k+1} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} \frac{2k+1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}.$$

• Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (n+1)W_n W_{n+1} &= (2k+2)W_{2k+1} W_{2k+2} \\ &= (2k+2) \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)!}{(2^{k+1}(k+1)!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)^2}{(2(k+1))^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$.

5. Puisque la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
 Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ d'où en divisant par W_n les inégalités ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1,$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$,

i.e. $\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}}$.

Puisque $n \underset{+\infty}{\sim} n+1$, on a donc d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_n W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$$

d'où $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nW_n^2}{\pi} = 1$.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2nW_n^2}{\pi}} = \sqrt{1} = 1$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$, on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} W_n = 1$, i.e.

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Problème 2 : Irrationalité de π

$$1. (a) I_0 = \pi \int_0^1 f_0(t) \sin(\pi t) dt = \pi \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \pi \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = -\cos(\pi) + \cos(0)$$

donc $\boxed{I_0 = 2}$.

D'autre part, on a $I_1 = \pi^3 \int_0^1 f_1(t) \sin(\pi t) dt = \pi^3 \int_0^1 (t - t^2) \sin(\pi t) dt$.

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t - t^2$, $u'(t) = 1 - 2t$ et $v'(t) = \sin(\pi t)$, d'où $v(t) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi t)$. On obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi^3 \left(\left[-\frac{1}{\pi} (t - t^2) \cos(\pi t) \right]_0^1 \right) - \pi^3 \int_0^1 -\frac{1}{\pi} (1 - 2t) \cos(\pi t) dt \\ &= \pi^2 \int_0^1 (1 - 2t) \cos(\pi t) dt. \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = 1 - 2t$, d'où $u'(t) = -2$ et $v'(t) = \cos(\pi t)$ d'où $v(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi^2 \left(\left[\frac{1}{\pi} (1 - 2t) \sin(\pi t) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi t) dt \right) \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi t) \right]_0^1 \\ &= -2(\cos(\pi) - \cos(0)) \end{aligned}$$

donc $I_1 = 4$.

- (b) Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} de dérivée pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'_n(t) = n(1 - 2t)(t - t^2)^{n-1}.$$

De même, f'_n est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et puisque $n - 1 \geq 1$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''_n(t) &= -2n(t - t^2)^{n-1} + n(n - 1)(1 - 2t)^2(t - t^2)^{n-2} \\ &= (t - t^2)^{n-2}(-2n(t - t^2) + n(n - 1)(1 - 2t)^2) \\ &= (t - t^2)^{n-2}(-2nt + 2nt^2 + n(n - 1)(1 - 4t + 4t^2)) \\ &= (t - t^2)^{n-2}(n(n - 1) + (-4n^2 + 2n)t + (4n^2 - 2n)t^2) \\ &= (t - t^2)^{n-2}(n(n - 1) + (4n^2 - 2n)(t^2 - t)) \\ &= (t - t^2)^{n-2}(n(n - 1) - 2n(2n - 1)(t - t^2)) \\ &= n(n - 1)(t - t^2)^{n-2} - 2n(2n - 1)(t - t^2)^{n-1} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, f''_n(t) = -2n(2n - 1)f_{n-1}(t) + n(n - 1)f_{n-2}(t)}$.

Remarquons que puisque $n \geq 2$ et $n - 1 \geq 1$, on a $f_n(0) = f_n(1) = f'_n(0) = f'_n(1) = 0$.

En réalisant deux intégrations par parties successives, on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 f_n(t) \sin(\pi t) dt \\ &= \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \left(\left[-\frac{1}{\pi} f_n(t) \cos(\pi t) \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 f'_n(t) \cos(\pi t) dt \right) \\ &= \frac{\pi^{2n}}{n!} \int_0^1 f'_n(t) \cos(\pi t) dt \\ &= \frac{\pi^{2n}}{n!} \left(\left[\frac{1}{\pi} f'_n(t) \sin(\pi t) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f''_n(t) \sin(\pi t) dt \right) \\ &= -\frac{\pi^{2n-1}}{n!} \int_0^1 (-2n(2n - 1)f_{n-1}(t) + n(n - 1)f_{n-2}(t)) \sin(\pi t) dt \\ &= 2n(2n - 1) \frac{\pi^{2n-1}}{n!} \int_0^1 f_{n-1}(t) \sin(\pi t) dt - n(n - 1) \frac{\pi^{2n-1}}{n!} \int_0^1 f_{n-2} \sin(\pi t) dt \\ &= 2(2n - 1) \frac{\pi^{2(n-1)+1}}{(n - 1)!} \int_0^1 f_{n-1}(t) \sin(\pi t) dt - \pi^2 \frac{\pi^{2(n-2)+1}}{(n - 2)!} \int_0^1 f_{n-2} \sin(\pi t) dt \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2, I_n = 2(2n - 1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}}$.

2. Pour tout $t \in [0, 1], \pi t \in [0, \pi]$ donc $0 \leq \sin(\pi t) \leq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$, pour tout $t \in [0, 1], f_0(t) = 1$ donc on a bien pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq f_0(t) \sin(\pi t) = \sin(\pi t) \leq 1.$$

- Supposons que $n > 0$.

On a vu que pour tout $t \in [0, 1] f'_n(t) = n(1 - 2t)(t - t^2)^{n-1} = n(1 - 2t)t^{n-1}(1 - t)^{n-1}$.

Or, pour tout $t \in [0, 1], nt^{n-1}(1 - t)^{n-1} \geq 0$ donc $f'_n(t)$ est du signe de $1 - 2t$, i.e. $f'_n(t) \geq 0$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f'_n(t) \leq 0$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Ainsi, la fonction f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Puisque $n \geq 1$, on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})^n = \frac{1}{4^n}$ donc pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{4^n}$.

On a donc bien pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(t) \sin(\pi t) \leq \frac{1}{4^n} \sin(\pi t) \leq \frac{1}{4^n}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(t) \sin(\pi t) \leq \frac{1}{4^n}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 f_n(t) \sin(\pi t) dt \leq \int_0^1 \frac{1}{4^n} dt$$

d'où

$$0 \leq \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 f_n(t) \sin(\pi t) dt \leq \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!},$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}$.

3. (a) Montrons par une récurrence de pas double que pour tout $n \geq 2$, $b^n I_n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $b^0 I_0 = 2$ et pour $n = 1$, on a $b^1 I_1 = b I_1 = 4b \in \mathbb{N}$.

• **Hérédité** : Soit $n \geq 2$ fixé. On suppose que $b^{n-2} I_{n-2} \in \mathbb{N}$ et $b^{n-1} I_{n-1} \in \mathbb{N}$.

Montrons que $b^n I_n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 1.b), on a

$$\begin{aligned} b^n I_n &= b^n (2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}) \\ &= 2(2n-1) b b^{n-1} I_{n-1} - b^2 \pi^2 b^{n-2} I_{n-2} \\ &= 2(2n-1) b b^{n-1} I_{n-1} - a^2 b^{n-2} I_{n-2}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $b^{n-2} I_{n-2} \in \mathbb{N}$ et $b^{n-1} I_{n-1} \in \mathbb{N}$ donc $b^n I_n \in \mathbb{Z}$.

Enfin, puisque $b^n I_n \geq 0$, on a bien $b^n I_n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n I_n \in \mathbb{N}$.

(b) D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq b^n I_n \leq \frac{b^n \pi^{2n+1}}{4^n n!} = \frac{\pi}{4^n} \frac{(b\pi^2)^n}{n!}.$$

Puisque $4 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$.

D'autre part, par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b\pi^2)^n}{n!} = 0$ donc par produit de limites,

on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n I_n = 0$.

(c) D'après les deux questions précédentes, la suite $(b^n I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et est à valeurs positives donc il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq b^n I_n \leq \frac{1}{2}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n I_n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $b^{n_0} I_{n_0} = 0$, d'où $I_{n_0} = 0$ puisque $b \neq 0$.

Comme $I_{n_0} = \frac{\pi^{2n_0+1}}{n_0!} \int_0^1 f_{n_0}(t) \sin(\pi t) dt$, alors $\int_0^1 f_{n_0}(t) \sin(\pi t) dt = 0$.

Or, on a déjà vu que la fonction $t \mapsto f_{n_0}(t) \sin(\pi t)$ est continue et positive sur $[0, 1]$ donc l'intégrale I_{n_0} est nulle si et seulement si pour tout $t \in [0, 1]$ $f_{n_0}(t) \sin(\pi t) = 0$, ce qui est absurde car $f_{n_0}(\frac{1}{2}) \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4^{n_0}} > 0$.

Ainsi, ayant supposé que π est rationnel, on aboutit à une contradiction.

Le nombre π est donc irrationnel.