
DEVOIR MAISON N°14
A RENDRE POUR LE MERCREDI 5 JUIN 2024

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit F le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - 3y + 5z = 0$.

Soit G le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x + 3z = 0$.

On définit l'orthogonal de F par $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 | \forall v \in F, u \cdot v = 0\}$ et l'orthogonal de G par $G^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 | \forall v \in G, u \cdot v = 0\}$

1. Montrer que $F^\perp$ et $G^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Donner une base de F et calculer sa dimension.
(b) Décrire l'espace $F^\perp$, puis en donner une base et sa dimension.
3. (a) Donner une base de G et calculer sa dimension.
(b) Décrire l'espace $G^\perp$, puis en donner une base et sa dimension.
4. Déterminer l'espace $F^\perp \cap G^\perp$.
5. (a) Donner une base de $F \cap G$ et calculer sa dimension.
(b) Compléter cette base de $F \cap G$ en une base de F , puis en une base de $\mathbb{R}^3$.