

Corrigé de la liste d'exercices n°19

Espaces vectoriels

Exercice 1

- $0 \notin F$ donc F n'est ni un \mathbb{R} -espace vectoriel, ni un \mathbb{C} -espace vectoriel.
- $F = \{x(2, 1, -1) + y(3, 0, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(2, 1, -1), (3, 0, 1)\}$ donc F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 mais ce n'est pas un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 (car $(2, 1, -1) \in F$ mais $i(2, 1, -1) \notin F$).
- $(2, 1, 0) \in F, (-2, 1, 0)$ mais $(2, 1, 0) + (-2, 1, 0) = (0, 2, 0) \notin F$ donc F n'est pas un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- $(1, 0, 1) \in F, (0, 1, 1) \in F$ mais $(1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 2) \notin F$ donc F n'est pas un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x\} = \{(x, y, z) = (x, y, -x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ donc F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- $F = \{x(1+i), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{1+i\}$ donc F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C} .
En revanche, ce n'est pas un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C} car $1+i \in F$ mais $i(1+i) = -1+i \notin F$.
- F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car $(-1, 1, 0) \in F$ mais $2(-1, 1, 0) = (-2, 2, 0) \notin F$.
- $F = \{x(0, 1) + y(3, 0) + z(2, 0) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{(0, 1), (3, 0), (2, 0)\}$ donc F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 (mais pas un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^2 car $i(0, 1) \notin F$).
- F n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car $(0, 0, 0) \notin F$.
- $F = \{(x, y, x+y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ donc F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 (mais n'est pas un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 car $i((1, 0, 1)) \notin F$).
- Montrons que F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C} .
Tout d'abord, $F \neq \emptyset$ car $0 \in F$.
Ensuite, soient $(z_1, z_2) \in F^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Montrons que $\lambda z_1 + \mu z_2 \in F$. On a

$$\begin{aligned} i(\lambda z_1 + \mu z_2) + \overline{\lambda z_1 + \mu z_2} &= i\lambda z_1 + i\mu z_2 + \lambda \bar{z}_1 + \mu \bar{z}_2 \quad \text{car } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \lambda(i z_1 + \bar{z}_1) + \mu(i z_2 + \bar{z}_2) \\ &= 0 \quad \text{car } (z_1, z_2) \in F^2 \end{aligned}$$

donc F est bien un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C} .

En revanche, F n'est pas un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C} .

En effet, $1+i \in F$ (car $i(1+i) + \overline{1+i} = i-1+1-i=0$) mais $i(1+i) = -1+i \notin F$ (car $i(-1+i) + \overline{-1+i} = -i-1-1-i = -2-2i \neq 0$).

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z = x + iy\} \\ &= \{(x, y, x + iy) \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, i) \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, i)\} \end{aligned}$$

donc F est bien un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 .

2. (a) On a $1 + i(-i) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ donc $e \in F$.

De même, $1 + i(-2i) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ donc $f \in F$.

(b) Le vecteur u est bien combinaison linéaire de e et f car $u = 2e - f$. Il est également combinaison linéaire des vecteurs v et w car $u = v - w$.

(c) D'après la première question la famille $((1, 0, 1), (0, 1, i))$ est une famille génératrice de F . Or, elle est également libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de F et on en déduit que $\dim(F) = 2$.

Les vecteurs e et f étant libres, on en déduit que $\dim(\text{Vect}\{e, f\}) = 2$. Or, puisque $(e, f) \in F^2$, $\text{Vect}\{e, f\} \subset F$ donc par égalité des dimensions, on en déduit que $\text{Vect}\{e, f\} = F$.

Nécessairement, tout vecteur de F est combinaison linéaire de e et f .

Exercice 3

1. $F = \{a(-1, 1, 0, 0, -6) + b(0, 0, 1, -1, 0) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0, 0, -6), (0, 0, 1, -1, 0)\}$
donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 .

2. Cherchons des vecteurs de \mathbb{R}^5 orthogonaux à tous les vecteurs de F . Pour cela, il suffit de trouver $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tel que

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (-1, 1, 0, 0, -6) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (0, 0, 1, -1, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 6x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + 6x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

d'où

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_1 + 6x_5, x_4, x_4, x_5) = x_1(1, 1, 0, 0, 0) + x_4(0, 0, 1, 1, 0) + x_5(0, 6, 0, 0, 1).$$

Ainsi, tous les vecteurs de F sont orthogonaux aux trois vecteurs $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 6, 0, 0, 1)$.

En fait, on peut montrer que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (1, 1, 0, 0, 0) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (0, 0, 1, 1, 0) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (0, 6, 0, 0, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

• Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ et si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$. Dans ces deux cas, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , il est clair que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

• Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E . Montrons qu'on a nécessairement $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Si $F \subset G$, le résultat est vrai.

Supposons que F n'est pas inclus dans G et montrons qu'alors G est nécessairement inclus dans F .

Soit $x \in G$. Il s'agit de montrer que $x \in F$.

Puisque F n'est pas inclus dans G , il existe un élément $y \in F$ tel que $y \notin G$.

On a alors $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$.

Notons $z = x + y$. Puisque $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E par hypothèse, on en déduit que $z \in F \cup G$, i.e. $z \in F$ ou $z \in G$.

Si $z \in G$, alors $y = z - x \in G$ puisque $(z, x) \in G^2$ et G est un sous-espace vectoriel de E . Mais $y \notin G$ donc il est impossible que z appartienne à G .

Nécessairement, $z \in F$ donc $x = z - y \in F$ puisque $(z, y) \in F^2$ et F est un sous-espace vectoriel de E .

On a donc bien montré que $x \in F$, ce qui prouve l'inclusion $G \subset F$.

Finalement, on a bien montré l'équivalence $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5

1. Les deux vecteurs sont colinéaires puisque $(27, -9, 21) = 3(9, -3, 7)$ donc la famille n'est pas libre.

Puisqu'elle contient strictement moins que trois éléments, elle n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 non plus.

2. La famille n'est pas libre puisque les deux premiers vecteurs sont colinéaires.

Ainsi, $\text{Vect}\{(9, -3, 7), (27, -9, 21), (5, -5, 1)\} = \text{Vect}\{(9, -3, 7), (5, -5, 1)\} \neq \mathbb{R}^3$ car une famille de deux vecteurs ne peut pas engendrer \mathbb{R}^3 .

3. La famille n'est pas libre puisqu'elle contient le vecteur nul.

Ainsi $\text{Vect}\{(1, 2, 2), (5, 6, 6), (0, 0, 0)\} = \text{Vect}\{(1, 2, 2), (5, 6, 6)\} \neq \mathbb{R}^3$ car une famille de deux vecteurs ne peut pas engendrer \mathbb{R}^3 .

4. La famille est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. En revanche, elle n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 car elle ne contient que deux éléments.

5. Montrons que la famille est libre. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + \gamma, -\alpha + \beta + \gamma, -\beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , elle est également génératrice de \mathbb{R}^3 : c'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

6. La famille contient quatre vecteurs dans \mathbb{R}^3 , elle ne peut donc pas être libre.

Montrons que la famille $((1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1))$ est libre.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, 0, -2) + \beta(2, 3, 1) + \gamma(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, 3\beta, -2\alpha + \beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

donc la famille $((1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1))$ est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , elle est également génératrice de \mathbb{R}^3 : c'est donc une base de \mathbb{R}^3 et on a $\text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3$.

Or,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (1, 0, 1)\} \subset \text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (7, 9, 5); (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

donc $\text{Vect}\{(1, 0, -2); (2, 3, 1); (7, 9, 5); (1, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que la famille

$$((1, 0, -2); (2, 3, 1); (7, 9, 5); (1, 0, 1))$$

est génératrice dans \mathbb{R}^3 (mais n'est pas libre, ce n'est donc pas une base de \mathbb{R}^3).

Exercice 6

1. On a $F = \{s(4, -5, -1, -2) | s \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(4, -5, -1, -2)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

De même,

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = -y + 5z - 2t\} \\ &= \{(-y + 5z - 2t, y, z, t) | (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(-1, 1, 0, 0) + z(5, 0, 1, 0) + t(-2, 0, 0, 1) | (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(-1, 1, 0, 0); (5, 0, 1, 0); (-2, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2. On a $4 + (-5) - 5(-1) + 2(-2) = 0$ donc $(4, -5, -1, -2) \in G$.

Ainsi, $F = \text{Vect}\{(4, -5, -1, -2)\} \subset G$.

3. Montrons que la famille $((-1, 1, 0, 0); (5, 0, 1, 0); (-2, 0, 0, 1))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(5, 0, 1, 0) + \gamma(-2, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (-\alpha + 5\beta - 2\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C'est donc une famille libre qui engendre G donc $\dim(G) = 3$.

On sait que le vecteur $(4, -5, -1, -2)$ constitue une base de F et appartient à G .

Montrons que la famille $((4, -5, -1, -2), (-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 0, 1))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(4, -5, -1, -2) + \beta(-1, 1, 0, 0) + \gamma(-2, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (4\alpha - \beta - 2\gamma, -5\alpha + \beta, -\alpha, -2\alpha + \gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C'est une famille libre contenant des vecteurs de G . Puisque $\dim(G) = 3$, on en déduit que c'est une base de G .

Exercice 7

1. $E = \{(x, y, x+y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ donc E est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de base $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

De même,

$$F = \{(x, x+z, z) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) | (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

donc F est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de base $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Enfin, on a

$$(x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

donc $(x, y, z) = z(0, 1, 1)$. Ainsi, $E \cap F = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de base $(0, 1, 1)$.

2. $E = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 2) \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ donc E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 de base $((1, 0, 0), (0, 1, 2))$ puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

De même, $F = \{(0, 2iz, z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \{z(0, 2i, 1) \mid z \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}\{(0, 2i, 1)\}$ donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 de base $(0, 2i, 1)$.

On a

$$(x, y, z) \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \\ y = 2iz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \\ y = 4iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $E \cap F = \{0\}$.

3. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z, t, u, v) \in E &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z - t - 3u = 0 \\ 2x + y + z - 2u - v = 0 \\ x + y + z - t - 2v = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x + 2y + z - t - 3u = 0 \\ -3y - z + 2t + 4u - v = 0 \\ -y + 3u - 2v = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2} \begin{cases} x + 2y + z - t - 3u = 0 \\ -3y - z + 2t + 4u - v = 0 \\ z - 2t + 5u - 5v = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t + 2u - v \\ y = 3u - 2v \\ z = 2t - 5u + 5v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t, u, v) = (-t + 2u - v, 3u - 2v, 2t - 5u + 5v, t, u, v) \end{aligned}$$

donc $(x, y, z, t, u, v) = t(-1, 0, 2, 1, 0, 0) + u(2, 3, -5, 0, 1, 0) + v(-1, -2, 5, 0, 0, 1)$ donc $E = \text{Vect}\{(-1, 0, 2, 1, 0, 0), (2, 3, -5, 0, 1, 0), (-1, -2, 5, 0, 0, 1)\}$. Vérifions que ces trois vecteurs forment une famille libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} &\alpha(-1, 0, 2, 1, 0, 0) + \beta(2, 3, -5, 0, 1, 0) + \gamma(-1, -2, 5, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow &(-\alpha + 2\beta - \gamma, 3\beta - 2\gamma, 2\alpha - 5\beta + 5\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow &\alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre et forme une base de E .

De même, on a

$$\begin{aligned} F &= \{a(1, 1, 1, 1, -1, 0) + b(0, 1, 0, 1, 2, 1) + c(1, -1, 1, 0, 1, 0)\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 1, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 1, 2, 1), (1, -1, 1, 0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Vérifions que ces trois vecteurs forment une famille libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} & \alpha(1, 1, 1, 1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0, 1, 2, 1) + \gamma(1, -1, 1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow & (\alpha + \gamma, \alpha + \beta - \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta, -\alpha + 2\beta + \gamma, \beta) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow & \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre et forme une base de F .

Déterminons $E \cap F$. On a

$$\begin{aligned} & (x, y, z, t, u, v) \in E \cap F \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t, u, v) = (a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \\ 3a + b + c = -3a + 6b + 4c \\ 3a + b + c = -3a + 5b + c \\ 3a + b + c = a + 3b \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t, u, v) = (a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \\ 6a - 5b - 3c = 0 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t, u, v) = (a + c, a + b - c, a + c, b + a, c - a + 2b, b) \\ -\frac{9}{2}a = 0 \\ b = \frac{3}{2}a \\ c = a \end{cases} \end{aligned}$$

donc $a = b = c = 0$ d'où $E \cap F = \{0\}$.

Exercice 8

1. Puisque ce sont des familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 contenant chacune trois vecteurs, il suffit de montrer qu'elles sont libres pour justifier que ce sont des bases de \mathbb{R}^3 .

• Montrons que la famille \mathcal{B} est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, -2) + \beta(1, -1, -3) + \gamma(0, 1, -2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + \beta, -\alpha - \beta + \gamma, -2\alpha - 3\beta - 2\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 3\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille \mathcal{B} est libre et est donc bien une base de \mathbb{R}^3 .

• Montrons que la famille \mathcal{B}' est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(1, 3, 9) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + 8\gamma = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 6\gamma = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille \mathcal{B}' est libre et est donc bien une base de \mathbb{R}^3 .

2. (a) Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, -2) + \beta(1, -1, -3) + \gamma(0, 1, -2) = (1, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ -\alpha - \beta + \gamma & = 2 \\ -2\alpha - 3\beta - 2\gamma & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ \hline \end{array} \begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ \gamma & = 3 \\ -\beta - 2\gamma & = 5 \end{cases}$$

d'où $\gamma = 3$, puis $\beta = -11$ et enfin $\alpha = 12$.

Ainsi, $(1, 2, 3) = 12(1, -1, -2) - 11(1, -1, -3) + 3(0, 1, -2)$ donc les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base \mathcal{B} sont $(12, -11, 3)$.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -1, -2) + \beta(1, -1, -3) + \gamma(0, 1, -2) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & = x \\ -\alpha - \beta + \gamma & = y \\ -2\alpha - 3\beta - 2\gamma & = z \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ \hline \end{array} \begin{cases} \alpha + \beta & = x \\ \gamma & = x + y \\ -\beta - 2\gamma & = 2x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 5x + 2y + z \\ \beta & = -4x - 2y - z \\ \gamma & = x + y \end{cases}$$

donc les coordonnées du vecteur $u = (x, y, z)$ dans la base \mathcal{B} sont

$$(5x + 2y + z, -4x - 2y - z, x + y).$$

3. On a $u = (1, -1, -2) + 2(1, -1, -3) + 3(0, 1, -2) = (3, 0, -14)$ et on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(3, 0, -14) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(1, 3, 9) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 3 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma & = 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma & = -14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \hline \end{array} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 3 \\ \beta + 2\gamma & = -3 \\ 3\beta + 8\gamma & = -17 \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ \hline \end{array} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 3 \\ \beta + 2\gamma & = -3 \\ 2\gamma & = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 2 \\ \beta & = 5 \\ \gamma & = -4 \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

1. Les vecteurs c et d n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre.

On remarque que $a = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$ donc $a \in \text{Vect}\{c, d\}$. De même, $b = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$ donc $b \in \text{Vect}\{c, d\}$.

Finalement, $\text{Vect}\{a, b, c, d\} = \text{Vect}\{c, d\}$ donc (c, d) est une base de $\text{Vect}\{a, b, c, d\}$.

2. On a $v = -\frac{2}{3}u$ donc $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u\}$, ce qui signifie que le vecteur u constitue une base de $\text{Vect}\{u, v\}$.

Exercice 10

1. On a

$$(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) + (e_p - e_1) = 0_E$$

donc la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{p-1} - e_p, e_p - e_1)$ est liée.

2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 (e_1 + e_2) + \cdots + \lambda_p (e_1 + \cdots + e_p) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p) e_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_p) e_2 + \cdots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p) e_{p-1} + \lambda_p e_p = 0.$$

Puisque la famille (e_1, \dots, e_p) est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0 \\ \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = 0 \\ \vdots = 0 \\ \lambda_{p-1} + \lambda_p = 0 \\ \lambda_p = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_p = 0$ puis $\lambda_{p-1} = 0$, puis par récurrence descendante, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + \cdots + e_p)$ est libre.

Exercice 11

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (e_1 + e_2) + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 (e_1 - e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3) e_1 + (\lambda_1 - \lambda_3) e_2 + \lambda_2 e_3 = 0.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_4 + \lambda_3 f_5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (e_1 + e_2) + \lambda_2 (e_3 - e_1) + \lambda_3 (e_3 + 2e_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3) e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) e_3 = 0.$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille (f_1, f_4, f_5) est libre.

3. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre est constituée de 4 vecteurs de E . Or, $\dim(E) = 3$ donc la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est nécessairement liée.

En effet, on a $f_4 = -\frac{1}{2}f_1 + f_2 - \frac{1}{2}f_3$.

Exercice 12

Il s'agit de calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 \\ 0 & 0 & -(a - 1)(a + 2) \end{pmatrix}.$$

- Si $a \notin \{1, -2\}$, la matrice est de rang 3 donc $\dim(\text{Vect}\{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}) = 3$.
- Si $a = 1$, la matrice est de rang 1 donc $\dim(\text{Vect}\{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}) = 1$.
- Si $a = -2$, la matrice est de rang 2 donc $\dim(\text{Vect}\{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\}) = 2$.

Exercice 13

1. Les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et $e_3 = 2e_2 - e_1$ donc $F = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$. Ainsi, $\dim(F) = 2$.
2. Posons $e'_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $e'_4 = (0, 1, 0, 0)$. Montrons que (e_1, e_2, e'_3, e'_4) forme une famille libre de \mathbb{R}^4 .

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4 = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = -5\lambda_1 \\ 17\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$.

Ainsi, la famille (e_1, e_2, e'_3, e'_4) à 4 est une famille libre à 4 éléments de \mathbb{R}^4 qui est de dimension 4 : c'est donc une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 14

On a $\dim(F) = \dim(G) = 2$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 engendrés par 2 vecteurs non colinéaires.

Ainsi $F = G \Leftrightarrow F \subset G \Leftrightarrow G \subset F$.

- Vérifions si $(0, 2, -1) \in F$. Pour cela cherchons des réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(0, 2, -1) = \alpha(1, 3, -1) + \beta(1, -3, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha - 3\beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 6\alpha = 2 \\ -3\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

donc $(0, 2, -1) = \frac{1}{3}(1, 3, -1) - \frac{1}{3}(1, -3, 2)$, ce qui prouve que $(0, 2, -1) \in F$.

- Vérifions si $(1, 9, -4) \in F$. Pour cela cherchons des réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(1, 9, -4) = \alpha(1, 3, -1) + \beta(1, -3, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 3\beta = 9 \\ -\alpha + 2\beta = -4 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -6\beta = 6 \\ 3\beta = -3 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\beta = -1$ et $\alpha = 2$ donc $(1, 9, -4) = 2(1, 3, -1) - (1, -3, 2)$.

On a donc $\{(0, 2, -1), (1, 9, -4)\} \subset F$ donc $G = \text{Vect}\{(0, 2, -1), (1, 9, -4)\} \subset F$ et puisque $\dim(F) = \dim(G)$, on a bien $F = G$.

Exercice 15

1. Vérifions si la famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1, -2, 3, 1) + \beta(4, 5, 6, 7) + \gamma(1, 0, 2, 3) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -2\alpha + 5\beta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ 3\alpha + 6\beta + 2\gamma = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \alpha + 7\beta + 3\gamma = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ 13\beta + 2\gamma = 0 \\ -6\beta - \gamma = 0 \\ 3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 13L_3 + 6L_2, L_4 \leftarrow 13L_4 - 3L_2} \begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ 13\beta + 2\gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ 20\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc la famille est libre. Le rang de la famille est donc égal à 3.

2. Déterminons le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1, L_5 \leftarrow L_5 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2, L_5 \leftarrow L_5 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

donc la famille est de rang 2.

Exercice 16

1. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4) = 4$.

2. Déterminons le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ i & 0 & -1 & -2 - i \\ 1 + i & 2 - i & 0 & 3i \\ -i & 1 + i & 1 & -5 - i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1, L_3 \leftarrow L_3 - (1+i)L_1, L_4 \leftarrow L_4 + iL_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1 - i \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 + i & 1 & -8 - i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2, L_4 \leftarrow L_4 + (2+i)L_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1 - i \\ 0 & 0 & -1 & 4 - i \\ 0 & 0 & 0 & -10 - 5i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1 - i \\ 0 & 0 & -1 & 4 - i \\ 0 & 0 & -1 - i & -5 - 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - (1+i)L_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 3i \\ 0 & -1 & -1 & 1 - i \\ 0 & 0 & -1 & 4 - i \\ 0 & 0 & 0 & -10 - 5i \end{pmatrix}$$

donc la matrice est de rang 4, i.e. le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par cette famille est de dimension 4.

3. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^4) = 8$ et le \mathbb{R} -a matrice est de rang 4, i.e. le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par cette famille est de dimension 8.

Exercice 17

On sait que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$. Puisque la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ contient $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$.

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

En appliquant le polynôme $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$ au réel x_j , il vient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_j) = 0.$$

Or, $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ donc la somme devient $\lambda_j L_j(x_j) = 0$, i.e. $\lambda_j = 0$.

Ceci étant valable pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ donc la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est libre, ce qui prouve que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18

1. • Tout d'abord, $0_E \in F \cap G$ donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.

• Soient $(u, v) \in (F + G)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u + v \in F + G$.

Puisque $u \in F + G$, il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. De même, il existe $(v_F, v_G) \in F \times G$ tel que $v = v_F + v_G$.

Ainsi, $\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + (v_F + v_G) = (\lambda u_F + v_F) + (\lambda u_G + v_G)$.

Puisque $(u_F, v_F) \in F^2$ et que F est un sous-espace vectoriel de E , on a $\lambda u_F + v_F \in F$. De même, puisque $(u_G, v_G) \in G^2$ et que G est un sous-espace vectoriel de E , on a $\lambda u_G + v_G \in G$ donc on a bien $\lambda u + v \in F + G$.

Ces deux points prouvent que $F + G$ est bien un sous-espace vectoriel de E .

2. Notons $p = \dim(F)$, $q = \dim(G)$ et considérons (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_q) deux bases respectives de F et G .

Soit $u \in F + G$. Il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.

Puisque (f_1, \dots, f_p) est une base de F , il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$u_F = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k.$$

De même, puisque (g_1, \dots, g_q) est une base de G , il existe des réels $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels

$$\text{que } u_G = \sum_{k=1}^q \mu_k g_k.$$

Ainsi, $u = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^q \mu_k g_k$, ce qui prouve que la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille génératrice de $F + G$ à $p + q$ éléments.

Puisque le cardinal d'une famille génératrice d'un espace vectoriel est toujours supérieur ou égal à la dimension de cet espace vectoriel, on a bien

$$\dim(F + G) \leq p + q = \dim(F) + \dim(G).$$

3. On reprend les notations de la question précédente. Montrons que si $F \cap G = \{0_E\}$, la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^q \mu_k g_k = 0_E \Leftrightarrow \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = - \sum_{k=1}^q \mu_k g_k \in F \cap G = \{0_E\}$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^q \mu_k g_k = 0_E.$$

Puisque les familles (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_q) sont libres, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mu_k = 0$.

Ainsi, la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre et d'après la question précédente, elle engendre $F + G$.

C'est donc une base de $F + G$ et on en déduit que $\dim(F + G) = p + q = \dim(F) + \dim(G)$.