21

Développements limités

Dans tout le chapitre, on considère des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle réel I. On considèrera des limites en $a \in \overline{I}$, ce qui signifie que a est dans I ou est situé aux bornes de l'intervalle I, a étant éventuellement infini.

21.1 Définition et propriétés des développements limités

21.1.1 Négligeabilité

Définition 1: Négligeabilité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction $x \longmapsto x^n$ au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

On note $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$ et on dit que f est un « petit o »de x^n au voisinage de a.

Remarque 1. • En pratique, on utilisera le plus souvent cette notation pour $a = 0$ et $a = +\infty$.
• On a $f(x) \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Exemple 1. • On a $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
• On a $\ln(x) \underset{0^+}{=} o(\frac{1}{x})$ puisque $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$.
• Si $n < m$ alors $x^n \underset{+\infty}{=} o(x^m)$ et $x^m \underset{0}{=} o(x^n)$.
Concrètement, $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $x^2 \underset{0}{=} o(x)$.

Proposition 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Alors $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$ si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I \setminus \{0\}, f(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration. • Supposons que $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$. Posons pour tout $x \in I \setminus \{0\}, \varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$.

On a alors pour tout $x \in I \setminus \{0\}, f(x) = x^n \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

• Supposons qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I \setminus \{0\}, f(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ donc $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$. ■

Proposition 2: Propriété des petits o

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On suppose que $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$.

1. Si $x^n \underset{a}{=} o(x^m)$, alors $f(x) \underset{a}{=} o(x^m)$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{Z}, f(x) \times x^p \underset{a}{=} o(x^{n+p})$.
3. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) \underset{a}{=} o(x^n)$.

   Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f(x) + \mu g(x) \underset{a}{=} o(x^n)$.

Démonstration. Puisque $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.

1. Si $x^n \underset{a}{=} o(x^m)$, alors $\lim_{x \to a} \frac{x^n}{x^m} = 0$ donc

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} \frac{x^n}{x^m} = 0,$$

   donc $f(x) \underset{a}{=} o(x^m)$.

2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \times x^p}{x^{n+p}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

   donc pour tout $p \in \mathbb{Z}, f(x) \times x^p \underset{a}{=} o(x^{n+p})$.

3. Puisque $g(x) \underset{a}{=} o(x^n)$, alors $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x^n} = 0$.

   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lim_{x \to a} \frac{\lambda f(x) + \mu g(x)}{x^n} = \lim_{x \to a} \lambda \frac{f(x)}{x^n} + \mu \frac{g(x)}{x^n} = 0$$

■

21.1.2 Développements limités en 0

Définition 2: Développements limités en 0

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I tel que $0 \in \overline{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe des réels $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{0}{=} o(x^n).$$

On note alors le développement limité de f à l'ordre n en 0 sous la forme

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Remarque 2. • Une définition équivalente est la suivante : on dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe des réels $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

• Si f admet en 0 un développement limité d'ordre n, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un développement limité d'ordre p en 0 obtenu par troncature.

En effet, si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k}{x^p} = \frac{\sum\limits_{k=p+1}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)}{x^p} = \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n-p} a_{k+p} x^k + x^{n-p}\varepsilon(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k = o(x^p)$ d'où $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$.

Exemple 2. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $x \in]-1, 1[$, $1 - x^{n+1} = (1-x) \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ donc pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$ donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{0}{=} o(x^n)$.
Ainsi, la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 et on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

On en déduit que $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{\sim} 1+x$.

En remplaçant x par $-x$, on trouve le développement limité

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Proposition 3: Unicité du développement limité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \in \overline{I}$. Soient $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet deux développements limités d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

et

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe deux fonctions $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0} \eta(x) = 0$ telles que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \eta(x),$$

d'où pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k + x^n(\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0.$$

Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$.

Soit $r = \min\{k \in [\![0, n]\!], a_k \neq b_k\}$, i.e. $a_r \neq b_r$ et pour tout $k \in [\![0, r-1]\!], a_k = b_k$. Alors pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=r}^{n} (a_k - b_k) x^k + x^n(\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0,$$

d'où en divisant par x^r, on a pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$a_r - b_r + x \sum_{k=r+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-1-r} + x^{n-r}(\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0$$

Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) - \eta(x) = 0$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} x \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-1-r} = 0$ donc en faisant tendre x vers 0, on trouve $a_r - b_r = 0$, i.e $a_r = b_r$, ce qui est absurde.

Nécessairement, pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$, d'où l'unicité du développement limité. ■

Remarque 3. Ceci entraîne également que pour tout $x \in I \setminus \{0\}, \varepsilon(x) = \eta(x)$, mais on ne les écrit pas en pratique.

Corollaire 1: Parité du développement limité en 0

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I centré en 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

1. Si la fonction f est paire, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ avec k impair, $a_k = 0$.
2. Si la fonction f est impaire, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ avec k pair, $a_k = 0$.

Démonstration.

1. Si f est paire, alors pour tout $x \in I, f(x) = f(-x)$, i.e. pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o(x^n).$$

   Par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^k a_k$ donc si k est impair, $a_k = -a_k$, d'où $a_k = 0$ si k est impair.

2. Si f est impaire, alors pour tout $x \in I, f(x) = -f(-x)$, i.e. pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{0}{=} -\sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} a_k x^k + o(x^n).$$

   Par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^{k+1} a_k$ donc si k est pair, $a_k = -a_k$, d'où $a_k = 0$ si k est pair.

■

21.1.3 Opérations sur les développements limités

Définition 3: Somme de développements limités

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $0 \in \overline{I}$. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$.
On suppose que f et g admettent en 0 des développements limités d'ordre n et p respectivement de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p).$$

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet en 0 un développement limité d'ordre n de la forme

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Il existe des fonctions $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to 0} \eta(x) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + x^p \eta(x).$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $x \in I$, on a

$$(\lambda f+\mu g)(x) = \lambda f(x)+\mu g(x) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)x^k + x^n \sum_{k=n+1}^{p} \mu b_k x^{n-k} + x^n(\lambda\varepsilon(x)+\mu x^{p-n}\eta(x)).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\frac{(\lambda f+\mu g)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)x^k}{x^n} = \sum_{k=n+1}^{p} \mu b_k x^{n-k} + \lambda\varepsilon(x) + \mu x^{p-n}\eta(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $(\lambda f+\mu g)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)x^k \underset{0}{=} o(x^n)$, ce qui est le résultat souhaité. ■

Exemple 3. $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1+x+x^2+x^3+o(x^3)+1-x+x^2+o(x^2) = 2+2x^2+o(x^2)$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ étant paire, son développement limité n'a que des monômes de degrés pairs.

Proposition 4: Produit de développements limités

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $0 \in \overline{I}$.
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leqslant p$.
On suppose que f et g admettent en 0 des développements limités d'ordre n et p respectivement de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p).$$

La fonction fg admet en 0 un développement limité d'ordre n de la forme

$$(fg)(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j \right) x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Il existe des fonctions $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0} \eta(x) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n\eta(x).$$

Par propriété du produit de polynômes, on trouve que pour tout $x \in I$,

$$\begin{array}{rcl}(fg)(x) & = & f(x)g(x) \\ & = & \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) + x^n\left(\eta(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n\varepsilon(x)\eta(x)\right) \\ & = & \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j\right) x^k + x^n\left(\eta(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n\varepsilon(x)\eta(x)\right) \\ & = & \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j\right) x^k + x^n\delta(x)\end{array}$$

où $\delta(x) = \left(x\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j\right) x^{k-n-1} + \eta(x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n\varepsilon(x)\eta(x)\right)$.

Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\frac{(fg)(x) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j\right) x^k}{x^n} = \delta(x) \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(fg)(x) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j\right) x^k \underset{0}{=} o(x^n)$, ce qui est le résultat souhaité. ■

Exemple 4. Déterminons le développement limité en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{1+x}$.

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{1+x^2}{1+x} & = & (1+x^2)(1-x+x^2-x^3+o(x^3)) \\ & = & 1-x+x^2-x^3+o(x^3)+x^2-x^3+o(x^3) \\ & = & 1-x+2x^2-2x^3+o(x^3).\end{array}$$

Remarque 4. On peut également composer des développements limités, comme on le verra sur des exemples ultérieurs.

Par exemple, $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^2)^k + o((x^2)^n) = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$.

21.1.4 Développements limités en un point et en l'infini

Définition 4: Développement limité en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I}$ un réel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Il est équivalent de dire que la fonction $g : h \longmapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0.

En effet,

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

En posant $x = a + h$, i.e. $h = x - a$ ceci équivaut à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k h^k}{h^n} = 0,$$

d'où $g(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$.

Remarque 5. En pratique, on ramène toujours un développement limité en un point $a \in \mathbb{R}$ à un développement limité en 0 via le changement de variable $h = x - a$.

Proposition 5: Développement limité d'une fonction continue ou dérivable

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$.

1. La fonction f est continue en a si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 0 et dans ce cas,
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1).$$
2. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 1 et dans ce cas,
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Démonstration.

1. On a les équivalences :
$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(a) \underset{a}{=} o(1),$$
ce qui équivaut à $f(x) = f(a) + o(1)$.

2. La preuve a déjà été faite dans le chapitre « Dérivation des fonctions réelles ».
   En effet, on a montré que f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout $x \in I$,
   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$
   Or, $(x-a)\varepsilon(x) \underset{a}{=} o(x-a)$, d'où le résultat voulu.

■

Remarque 6. En revanche, il se peut qu'une fonction admette un développement limité d'ordre 2 en un point sans y être deux fois dérivable.

Par exemple, soit $\begin{array}{rccl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right. \end{array}$

Tout d'abord, comme la fonction sinus est bornée, on a bien $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui prouve que la fonction f est continue en 0.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
donc $f'(0) = 0$.

En revanche, pour tout $x \neq 0$ $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et ceci n'a pas de limite en 0 puisque cosinus n'a pas de limite en l'infini.

Ainsi, la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Or, elle y admet bien un développement limité d'ordre 2 puisque
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
donc $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$, ce qui est le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.

Définition 5: Développement limité en l'infini

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ s'il existe deux entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et des réels $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_p}{x_p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

Remarque 7. • On définit de même un développement limité en $-\infty$.

• En pratique, un développement limité en $\pm\infty$ sert à déterminer des asymptotes et la position relative de la courbe de la fonction étudiée par rapport à cette asymptote.

Exemple 5. Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. Déterminons un développement limité de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

On se ramène à un développement limité en 0 : on a pour tout $x\notin\{0,1\}$,

$$g(x)=\frac{x^2+1}{x(1-\frac{1}{x})}=\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Posons $h=\dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers $+\infty, h$ tend vers 0 et on a le développement limité d'ordre 2 en 0 : $\dfrac{1}{1-h}\underset{=}{1}+h+h^2+o(h^2)$ donc en $+\infty$:

$$\frac{1}{1-x}\underset{+\infty}{=}1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$g(x)\underset{+\infty}{=}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Or, en $+\infty$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc

$$g(x)\underset{+\infty}{=}x+1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-(x+1)=0$ donc la courbe de la fonction g admet pour asymtote oblique au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y=x+1$.

De plus, $g(x)-(x+1)\underset{+\infty}{=}\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{2}{x}>0$ donc au voisinage de $+\infty, g(x)-(x+1)>0$, ce qui prouve que la courbe de la fonction g est située au-dessus de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

On montre de même que $g(x)\underset{-\infty}{=}x+1+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, d'où $g(x)-(x+1)\underset{-\infty}{=}\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi, la courbe de la fonction g admet pour asymtote oblique au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation $y=x+1$. Cette fois, au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{2}{x}<0$ donc la courbe de la fonction g est située en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

21.1.5 Primitivation d'un développement limité

Proposition 6: Primitivation d'un développement limité

Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, avec $0\in I$.
On suppose que la fonction f' est continue sur I et admet un développement limité d'ordre $n\in\mathbb{N}$ en 0 de la forme

$$f'(x)\underset{0}{=}\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n).$$

Alors la fonction f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 de la forme

$$f(x)\underset{0}{=}f(0)+\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^{n+1}).$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une fonction $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n \eta(t).$$

Soit $x \in I$. En intégrant entre 0 et x, on obtient d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^x a_k t^k dt + \int_0^x t^n \eta(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + \int_0^x t^n \eta(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^n \eta(t)dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [-\alpha, \alpha]$, $|\eta(x)| \leqslant (n+1)\varepsilon$.

Soit $x \in I \cap [-\alpha, \alpha]$.

- Si $x \geqslant 0$, on a

$$\left|\int_0^x t^n \eta(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |t^n \eta(t)|dt \leqslant (n+1)\varepsilon \int_0^x t^n dt = (n+1)\varepsilon \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \varepsilon x^{n+1} = \varepsilon|x^{n+1}|.$$

- Si $x \leqslant 0$, on a

$$\left|\int_0^x t^n \eta(t)dt\right| \leqslant \int_x^0 |t^n \eta(t)|dt \leqslant (-1)^n(n+1)\varepsilon \int_x^0 t^n dt = (-1)^n(n+1)\varepsilon \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = (-1)^{n+1}\varepsilon x^{n+1} = \varepsilon|x^{n+1}|.$$

Ainsi, pour tout $x \in I \cap [-\alpha, \alpha]$, $\left|\int_0^x t^n \eta(t)dt\right| \leqslant \varepsilon|x^{n+1}|$ donc $\left|\dfrac{\int_0^x t^n \eta(t)dt}{x^{n+1}}\right| \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim_{x\to 0} \left|\dfrac{\int_0^x t^n \eta(t)dt}{x^{n+1}}\right| = 0$, i.e. $\int_0^x t^n \eta(t)dt \underset{0}{=} o(x^{n+1})$.

On a donc bien pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^n \eta(t)dt \underset{0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

■

Exemple 6. Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, avec f' continue sur $]-1, +\infty[$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f' admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

donc en primitivant, on trouve un développement limité de f d'ordre $n+1$ en 0 de la forme

$$f(x)=\ln(1+x)=f(0)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^{n+1}).$$

En remplaçant x par $-x$, on trouve un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 de $x\longmapsto \ln(1-x)$ de la forme

$$\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{(-x)^k}{k}+o(x^{n+1})=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}+o(x^{n+1})=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}).$$

Remarque 8. En revanche, on ne peut pas dériver un développement limité.

Soit $\begin{array}{cccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si}\, x\neq 0 \\ 0 & \text{si}\, x=0. \end{cases} \end{array}$.

On a vu dans le chapitre ≪ Dérivation des fonctions réelles ≫que la fonction f est dérivable en 0 mais la fonction f' n'est pas continue en 0.

Ainsi, la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 (qui est $f(x)=o(x)$) mais f' n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0.

21.2 Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

21.2.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 1: Formule de Taylor-Young

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $a\in I$.
Alors la fonction f admet un développement limité d'ordre n en a de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n) \\ &\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Démonstration. Admise dans le cas général. Prouvons-la dans le cas où $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$.

Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:≪ si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors pour tout $x\in I$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \text{ ≫}.$$

•Initialisation : Pour $n=0$, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a pour tout $x\in I$,

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt=\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{f^{(0+1)}(t)}{0!}(x-t)^0 dt$$

donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

•Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. A fortiori f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a pour tout $x\in I$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I, alors $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

On peut donc réaliser une intégration par parties en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t), u'(t) = f^{(n+2)}(t), v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}, v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ donc on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

On a donc bien montré que, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.}$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment I donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée.

On en déduit qu'il existe un réel M positif tel que $\boxed{\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M.}$ Soit $x \in I$. D'après la question 2, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right|.$$

• Si $x \geqslant a$, on a

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \int_a^x \frac{|f^{(n-1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leqslant \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt = \frac{M}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x$$

d'où $\left| \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \dfrac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

• Si $x \leqslant a$, on a

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \int_x^a \frac{|f^{(n-1)}(t)|}{n!}|x-t|^n dt \leqslant \frac{M}{n!}\int_x^a (t-x)^n dt = \frac{M}{n!}\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_x^a$$

d'où $\left| \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| \leqslant \dfrac{M(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dans tous les cas, on a bien

$$\boxed{\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

■

Remarque 9. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet donc en tout point un développement limité d'ordre n.

En particulier, si $0 \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) & \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\ & \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Exemple 7. Si on note $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ d'où $f^{(k)}(0) = k!$. D'après la formule de Taylor-Young, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1-x} = f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

On retrouve le développement limité de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ obtenu auparavant.

21.2.2 Développements limités usuels au voisinage de 0

Proposition 7: Développements limités usuels au voisinage de 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

2. $$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

3. $$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

4. $$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

5. $$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Puisque exp est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :
$$\exp(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$
Or, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n, \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ donc
$$\exp(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$
2. Puisque cos est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :
$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$
On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k+1} \sin(0) = 0$ donc
$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$
3. Puisque sin est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young :
$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$
On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ et $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ donc
$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$
4. Preuve déjà faite.
5. Preuve déjà faite.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$.
On montre facilement par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ donc on obtient d'après la formule de Taylor-Young :
$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n),$$
ce qui est le résultat voulu.

■

Remarque 10. • Puisque cos est paire et sin est impaire, on remarque que leurs développements limités ne comportent que des puissances paires et impaires respectivement.
• En remplaçant x par $-x$, on retrouve les développements limités
$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$
et
$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{0}{=} -\sum_{k=0} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Exemple 8. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Exemple 9. Trouvons le développement limité de tan en 0 à l'ordre 3 (on sait qu'il existe d'après la formule de Taylor-Young).

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

On a $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Par ailleurs, $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$.

Posons $X = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Quand x tend vers $0, X$ tend vers 0 et on a donc

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \underset{0}{=} \frac{1}{1-X} = 1 + X + o(X) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi, on trouve

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

21.3 Applications

21.3.1 Calcul d'équivalents et de limites

Proposition 8

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} a_p x^p + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

avec $p \leqslant n$ et $a_p \neq 0$.
Alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

Démonstration. En effet, si $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ avec $a_p \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$ car $\dfrac{f(x)}{a_p x^p} = 1 + \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{a_p} x^{k-p} + \frac{1}{a_p} x^{n-p} \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$. ∎

Remarque 11. Le résultat se généralise en tout point a : si

$$f(x) = a_p (x-a)^p + \ldots a_n (x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} a_p (x-a)^p.$$

Exemple 10. Cherchons un équivalent en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)}$.

On a $e^x - \sqrt{1+x} = 1 + x + o(x) - 1 - \dfrac{x}{2} + o(x) = \dfrac{x}{2} + o(x)$ donc $e^x - \sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

Par ailleurs, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc par quotient :

$$\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, ceci signifie que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

En établissant un développement limité d'ordre 1 de f en 0, on peut montrer que ce prolongement par continuité de f est également dérivable en 0.

On a $e^x - \sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o(x^2) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5x^2}{8} + o(x^2)$.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)}.$$

En posant $X = \dfrac{x}{2} + o(x)$ et en utilisant le développement limité $\dfrac{1}{1-X} \underset{0}{=} 1 + X + o(X)$, on obtient

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

donc finalement

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} + o(x^2)\right) \\
&= \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{5x}{8} + o(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{7x}{8} + o(x),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{7}{8}$.

21.3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 9: Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction admettant un développement limité en un point a de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a))^2$$

avec $f''(a) \neq 0$.
Soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$.
Alors la courbe de f est située au-dessus de cette tangente au voisinage de a si et seulement si $f''(a) > 0$.

Démonstration. On a $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) = \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$.

Ainsi, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \underset{a}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$.

Puisque $(x-a)^2 \geqslant 0$, le signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ au voisinage de a est celui de $f''(a)$, d'où le résultat. ∎

Exemple 11. • Au voisinage de 0, on a $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Soit $y = 1 + x$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle.

Puisque $e^x - (1 + x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $\dfrac{x^2}{2}$ est positif au voisinage de 0, on en déduit que la courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

• Au voisinage de 0, on a $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Soit $y = x$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

Puisque $\ln(1 + x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $-\dfrac{x^2}{2}$ est négatif au voisinage de 0, on en déduit que la courbe de la fonction f est située en-dessous de sa tangente au voisinage e 0.