BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir maison n°14

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. $\bullet (0,0,0) \in F^\perp$ puisque pour tout $u=(x,y,z) \in F, (x,y,z)\cdot(0,0,0)=0$.
   $\bullet$ Soient $(u,u') \in (F^\perp)^2$, soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $\lambda u + \mu u' \in F^\perp$.
   Soit $v \in F$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a
   $$(\lambda u + \mu u')\cdot v = \lambda(u\cdot v) + \mu(u'\cdot v).$$
   Or, $(u,u') \in (F^\perp)^2$ donc $u\cdot v = u'\cdot v = 0$ d'où $(\lambda u + \mu u')\cdot v = 0$ et ce pour tout $v \in F$. Donc $\lambda u + \mu u' \in F^\perp$.
   On a donc bien montré que $\boxed{F^\perp \text{est un sous-espace vectoriel de} \, \mathbb{R}^3.}$
   On montre exactement de la même manière que $\boxed{G^\perp \text{est un sous-espace vectoriel de} \, \mathbb{R}^3.}$

2. (a) On a
   $$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x-3y+5z=0\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}z\right\} \\ &= \left\{\left(x, \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}z, z\right), (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x\left(1,\frac{2}{3},0\right) + z\left(0,\frac{5}{3},1\right), (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{\left(1,\frac{2}{3},0\right), \left(0,\frac{5}{3},1\right)\right\} \\ &= \boxed{\mathrm{Vect}\left\{(3,2,0),(0,5,3)\right\}.} \end{aligned}$$
   La famille $(3,2,0),(0,5,3)$ est une famille libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de F : c'est donc une base de F d'où $\boxed{\dim(F)=2.}$

   (b) Par définition, un vecteur est dans $F^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de F. Puisque tout vecteur de F est combinaison linéaire de $(3,2,0)$ et de $(0,5,3)$, on a alors
   $$(x,y,z) \in F^\perp \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (3,2,0).(x,y,z) &=& 0 \\ (0,5,3).(x,y,z) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y &=& 0 \\ 5y+3z &=& 0 \end{array}\right.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} y &=& -\frac{3}{2}x \\ z &=& \frac{-5}{3}y = \frac{5}{2}x \end{array}\right.$$
   donc $(x,y,z) \in F^\perp$ si et seulement si $(x,y,z) = (x, -\frac{3}{2}x, \frac{5}{2}x) = x(1,-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ donc
   $$\boxed{F^\perp = \mathrm{Vect}\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \mathrm{Vect}\,(2,-3,5)}.$$
   Le vecteur $(2,-3,5)$ est alors une base de $F^\perp$ et $\boxed{\dim(F^\perp)=1.}$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+3z=0\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=-3z\right\} \\ &= \left\{(-3z,y,z)\,,(y,z)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y\,(0,1,0)+z\,(-3,0,1)\,,(x,z)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \boxed{\mathrm{Vect}\,\{(0,1,0)\,,(-3,0,1)\}} \end{aligned}$$

La famille $(0,1,0),(-3,0,1)$ est une famille libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de G : c'est donc une base de G d'où $\boxed{\dim(G)=2.}$

(b) De même que pour $F^{\perp}$, on a

$$(x,y,z)\in G^{\perp} \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ccc} y & = & 0 \\ -3x+z & = & 0 \end{array}\right.} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & 0 \\ z & = & 3x \end{array}\right.$$

donc $(x,y,z)\in G^{\perp}$ si et seulement si $(x,y,z)=(x,0,3x)=x(1,0,3$ donc

$$\boxed{G^{\perp}=\mathrm{Vect}\,(1,0,3)}.$$

Le vecteur $(1,0,3)$ est alors une base de $G^{\perp}$ et $\boxed{\dim(G^{\perp})=1.}$

4. Soit $(x,y,z)\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$.
Puisque $(x,y,z)\in F^{\perp}$, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z)=\lambda(2,-3,5)=(2\lambda,-3\lambda,5\lambda).$$

Puisque $(x,y,z)\in G^{\perp}$, alors il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z)=\mu(1,0,3)=(\mu,0,3\mu).$$

On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2\lambda & = & \mu \\ -3\lambda & = & 0 \\ 5\lambda & = & 3\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda=\mu=0$$

donc $(x,y,z)=(0,0,0)$.
Ceci prouve que $F^{\perp}\cap G^{\perp}\subset\{(0,0,0)\}$ et puisque l'inclusion réciproque est immédiate, on en conclut que $\boxed{F^{\perp}\cap G^{\perp}=(0,0,0).}$

5. (a) On a les équivalences suivantes :

$$(x,y,z)\in F\cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x-3y+5z & = & 0 \\ x+3z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & -\frac{1}{3}z \\ x & = & -3z \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=z(-3,-\frac{1}{3},1)$$

donc $\boxed{F\cap G=\mathrm{Vect}\left(-3,-\frac{1}{3},1\right)=\mathrm{Vect}(9,1,-3).}$

Le vecteur $(9,1,-3)$ est alors une base de $F\cap G$ et $\boxed{\dim(F\cap G)=1.}$

(b) Montrons que $((9,1,-3),(3,2,0))$ est une base de F.
Tout d'abord, $(9,1,-3) \in F \cap G \subset F$ et $(3,2,0) \in F$ comme vu à la question 2.a).
La famille est libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est une famille libre à deux éléments de F qui est de dimension 2 donc $\boxed{((9,1,-3),(3,2,0)) \text{ est une base de } F.}$
D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de trouver un troisième vecteur pour former une base de $\mathbb{R}^3$.
Montrons que la famille $((9,1,-3),(3,2,0),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha(9,1,-3)+\beta(3,2,0)+\gamma(1,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 9\alpha+3\beta+\gamma & = & 0 \\ \alpha+2\beta & = & 0 \\ -3\alpha & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

$\boxed{\text{La famille } (9,1,-3),(3,2,0),(1,0,0) \text{ est donc libre,}}$ et puisqu'elle est constituée de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$