Lycée Fénelon — BCPST1
Année 2023-2024 — A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°8
Samedi 8 juin 2024 (3h30)

Exercice

1. • On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = -3x+2z\} \\ &= \{(x,-3x+2z,z) | (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,-3,0)+z(0,2,1) | (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,-3,0),(0,2,1)\} \end{aligned}$$

donc F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,-3,0)$ et $(0,2,1)$. Puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de F. C'est donc une famille libre et génératrice de F, donc $\boxed{((1,-3,0),(0,2,1)) \text{ est une base de } F}$ et $\boxed{\dim(F) = 2.}$

• De même,

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x+y\} \\ &= \{(x,y,x+y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\} \end{aligned}$$

donc G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteur $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$. Puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de G. C'est donc une famille libre et génératrice de G, donc $\boxed{((1,0,1),(0,1,1)) \text{ est une base de } G}$ et $\boxed{\dim(G) = 2.}$

2. On a

$$(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-2z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x+y-2z &= 0 \\ 2y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= y \\ z &= 2y \end{cases}$$

donc $F \cap G = \{(y,y,2y) | y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,2)\}$.
Ainsi, le vecteur non nul $\boxed{(1,1,2) \text{ est une base de } F \cap G}$ et $\boxed{\dim(F \cap G) = 1.}$

3. $((1,1,2),(1,0,1))$ est une famille libre constituée de deux vecteurs de G.
Puisque $\dim(G) = 2$, on en déduit que $\boxed{((1,1,2),(1,0,1)) \text{ est une base de } G.}$
Puisque $(1,0,0) \notin G = \mathrm{Vect}\{(1,1,2),(1,0,1)\}$, on sait d'après le cours que la famille $((1,1,2),(1,0,1),(1,0,0))$ reste libre. Montrons-le.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1,1,2)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha &= 0 \\ 2\alpha+\beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc la famille est libre.
Puisqu'elle est consituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que $\boxed{((1,1,2),(1,0,1),(1,0,0)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

4. • Montrons que $H \subset F$.
On a $3 \times (-4) + 6 - 2 \times (-3) = 0$ donc $(-4, 6, -3) \in F$.
De même, $3 \times 5 + (-5) - 2 \times 5 = 0$ donc $(5, -5, 5) \in F$.
Ainsi, $\{(-4,6,-3),(5,-5,5)\} \subset F$. Puisque $\mathrm{Vect}\{(-4,6,-3),(5,-5,5)\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à contenir la famille $((-4,6,-3),(5,-5,5))$, on en déduit que $\mathrm{Vect}\{(-4,6,-3),(5,-5,5)\} \subset F$, i.e. $H \subset F$.
• De plus, la famille $((-4,6,-3),(5,-5,5))$ est libre puisqu'elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}\{(-4,6,-3),(5,-5,5)\} = H$.
Ainsi, $\dim(H) = 2 = \dim(F)$ et puisque $H \subset F$, on en déduit par égalité des dimensions que $\boxed{H = F}$.

Problème : Projecteurs et symétries

Partie I : Généralités

1. (a) Montrons que $\mathrm{Im}(p) = F$ en procédant par double inclusion.
• Montrons que $F \subset \mathrm{Im}(p)$.
Soit $x \in F$. Par définition on a $x = p(x)$. Or, $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ donc $x \in \mathrm{Im}(p)$ ce qui prouve l'inclusion $F \subset \mathrm{Im}(p)$.
• Montrons que $\mathrm{Im}(p) \subset F$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
Or, puisque p est un projecteur, $p \circ p = p$ donc $y = p(x) = p \circ p(x) = p(p(x)) = p(y)$, ce qui prouve que $y \in F$.
On a bien l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset F$, et finalement on a l'égalité $\boxed{F = \mathrm{Im}(p).}$
Par ailleurs, par définition, $\boxed{G = \ker(p).}$
(b) D'après le cours, puisque $p \in \mathcal{L}(E), \ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E.}$
(c) • Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E, F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F \cap G$, ce qui prouve que $\{0_E\} \subset F \cap G$.
• Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$.
Soit $x \in F \cap G$. Puisque $x \in F$, alors $x = p(x)$. Or, puisque $x \in G, p(x) = 0_E$ donc $x = 0_E$, ce qui prouve que $F \cap G \subset \{0_E\}$ et finalement $\boxed{F \cap G = \{0_E\}.}$
(d) • **Analyse :** Supposons qu'il existe un couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
Par linéarité de p, on a $p(x) = p(x_F) + p(x_G)$.
Puisque $x_F \in F, p(x_F) = x_F$ et puisque $x_G \in G$, alors $p(x_G) = 0_E$ donc

$$p(x) = p(x_F) + p(x_G) = x_F.$$

Ainsi, on a nécessairement $x_F = p(x)$ puis $x_G = x - x_F = x - p(x)$.
• **Synthèse :** Posons $x_F = p(x)$ et $x_G = x - p(x)$. Vérifions que $(x_F, x_G) \in F \times G$ et que $x = x_F + x_G$.
On a $x_F = p(x) \in \mathrm{Im}(p) = F$ d'après la question 1.a).
D'autre part, par linéarité de p, on a $p(x_G) = p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x)$.

Or, $p \circ p = p$ donc $p(x_G) = p(x) - p(x) = 0_E$, ce qui prouve que $x_G \in \ker(p) = G$.
Enfin, $x_F + x_G = p(x) + x - p(x) = x$.
$\boxed{\text{Il existe donc bien un unique couple } (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tel que } x = x_F + x_G}$ et on a $\boxed{p(x) = x_F}$ et $\boxed{x_G = x - p(x)}$.

2. (a) Tout d'abord, l'application s est linéaire comme combinaison d'applications linéaires (puisque p et Id_E sont linéaire).
Montrons que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Par linéarité de s, on a pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} s \circ s(x) &= s(2p(x) - x) \\ &= 2s(p(x)) - s(x) = 2(2p(p(x)) - p(x)) - (2p(x) - x) \\ &= 4(p \circ p)(x) - 2p(x) - 2p(x) + x. \end{aligned}$$

Or, $p \circ p = p$ donc $s \circ s(x) = 4p(x) - 4p(x) + x = x$ et ce pour tout $x \in E$, donc $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = s$, ce qui prouve que $\boxed{s \text{ est une symétrie.}}$

(b) On a les équivalences suivantes :

$$x \in F \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow 2p(x) - x = x \Leftrightarrow s(x) = x$$

donc $\boxed{F = \{x \in E | s(x) = x\}.}$
De même :

$$x \in G \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow 2p(x) - x = -x \Leftrightarrow s(x) = -x$$

donc $\boxed{G = \{x \in E | s(x) = -x\}.}$

(c) Par linéarité de s, on a $s(x) = s(x_F) + s(x_G)$. Puisque $x_F \in F$, on a $s(x_F) = x_F$ et puisque $x_G \in G$, on a $s(x_G) = -x_G$ donc $\boxed{s(x) = x_F - x_G.}$

(d) Il faut montrer que l'application linéaire s est bijective.
• Montrons que s est injective. Pour cela, montrons que $\ker(s) = \{0_E\}$.
On a toujours $\{0_E\} \subset \ker(s)$. Montrons que $\ker(s) \subset \{0_E\}$.
Soit $x \in \ker(s)$, i.e. $s(x) = 0_E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
On a alors $0_E = s(x) = x_F - x_G$ d'où $x_F = x_G \in F \cap G$. Or, d'après la question 1.c), on sait que $F \cap G = \{0_E\}$ donc $x_F = x_G = 0_E$, d'où $x = x_F + x_G = 0_E$.
On a donc bien $\ker(s) = \{0_E\}$, ce qui prouve que s est injective.
• Montrons que s est surjective.
Soit $x \in E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
On a alors d'après la question précédente

$$s(x_F - x_G) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x$$

donc tout vecteur x de E admet un antécédent par s, ce qui prouve que s est surjective.
Finalement, s est un endomorphisme de E bijectif, c'est à dire $\boxed{s \text{ est un automorphisme.}}$

3. • Supposons que $p \circ f = f \circ p$.
Montrons que F est stable par f, c'est à dire montrons que pour tout $x \in F$, alors $f(x) \in F$.

Soit $x \in F$.
On a $p(f(x)) = f(p(x))$ puisque $p \circ f = f \circ p$. Or, $x \in F$ donc $p(x) = x$ d'où $p(f(x)) = f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in F$. On a donc bien montré que F est stable par f.

Montrons maintenant que G est stable par f, c'est à dire montrons que pour tout $x \in G$, alors $f(x) \in G$.

Soit $x \in G$. On a $p(f(x)) = f(p(x))$. Or, $p(x) = 0_E$ puisque $x \in G$ donc $p(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ puisque f est linéaire. Ainsi, $p(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in G$, ce qui prouve que G est stable par f.

• Réciproquement, supposons que F et G sont stables par f et montrons que $p \circ f = f \circ p$.

Soit $x \in E$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs de $F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
Par linéarité de $f \circ p$, on a

$$(f \circ p)(x) = (f \circ p)(x_F + x_G) = (f \circ p)(x_F) + (f \circ p)(x_G) = f(p(x_F)) + f(p(x_G)).$$

Puisque $x_F \in F, p(x_F) = x_F$ et puisque $x_G \in G$, alors $p(x_G) = 0_E$ donc $f(p(x_G)) = f(0_E) = 0_E$ par linéarité de f.
On en déduit que $(f \circ p)(x) = f(p(x_F)) = f(x_F)$.
Par ailleurs, par linéarité de $p \circ f$, on a

$$(p \circ f)(x) = (p \circ f)(x_F + x_G) = (p \circ f)(x_F) + (p \circ f)(x_G) = p(f(x_F)) + p(f(x_G)).$$

Puisque F est stable par f, alors $f(x_F) \in F$ donc $p(f(x_F)) = f(x_F)$. De même, puisque G est stable par f, alors $f(x_G) \in G$ donc $p(f(x_G)) = 0_E$ d'où $(p \circ f)(x) = f(x_F)$.
On a donc bien $(f \circ p)(x) = (p \circ f)(x)$, et ce pour tout $x \in E$, donc $f \circ p = p \circ f$.
On a donc bien montré que

$$\boxed{f \circ p = p \circ f \text{ si et seulement si } F \text{ et } G \text{ sont stables par } f.}$$

4. (a) Tout d'abord, puisque p et q sont des endomorphismes de E, par composition d'applications linéaires, on en déduit que $p \circ q$ est également un endomorphisme de E.
Enfin, en utilisant que $p \circ q = q \circ p$, on en déduit que

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q).$$

Or, p et q sont des projecteurs donc $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$. Ainsi, on a bien $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$, ce qui prouve que $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur.}}$

(b) • Montrons que $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset F \cap \mathrm{Im}(q)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (p \circ q)(x) = p(q(x)) \in \mathrm{Im}(p) = F$.
Par ailleurs, puisque $p \circ q = q \circ p$, on a $y = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x)) \in \mathrm{Im}(q)$ donc $y \in F \cap \mathrm{Im}(q)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset F \cap \mathrm{Im}(q)$.
• Montrons que $F \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$.
Puisque q et $p \circ q$ sont des projecteurs, on peut montrer de manière analogue à la question 1.a) que $\mathrm{Im}(q) = \{x \in E | q(x) = x\}$ et $\mathrm{Im}(p \circ q) = \{x \in E | (p \circ q)(x) = x\}$.
Considérons alors $x \in F \cap \mathrm{Im}(q)$.
On a $(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(x)$ car $q(x) = x$ puisque $x \in \mathrm{Im}(q)$. De même, puisque $x \in F$, alors $p(x) = x$ donc $(p \circ q)(x) = x$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, d'où l'inclusion $F \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$.
On a donc bien montré l'égalité $\boxed{\mathrm{Im}(p \circ q) = F \cap \mathrm{Im}(q).}$

5. (a) D'après la question précédente, on a les équivalences $F\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}\Leftrightarrow\mathrm{Im}(p\circ q)=\{0_E\}$.
Or, $\mathrm{Im}(p\circ q)=\{0_E\}\Leftrightarrow\forall x\in E,(p\circ q)(x)=0_E\Leftrightarrow p\circ q=0$.
On a donc bien $\boxed{F\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}\Leftrightarrow p\circ q=0.}$

(b) • Supposons que $G\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}$, i.e. $\ker(p)\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}$. Montrons que $p\circ q=q$.
Soit $x\in E$. Soit $(x_F,x_G)\in F\times G$ tel que $x=x_F+x_G$.
On a alors $(p\circ q)(x)=(p\circ q)(x_F)+(p\circ q)(x_G)=(q\circ p)(x_F)+(q\circ p)(x_G)$.
Or, $p(x_G)=0_E$ car $x_G\in G=\ker(p)$ et $p(x_F)=x_F$ car $x_F\in F$ donc

$$(p\circ q)(x)=q(x_F)+q(0_E)=q(x_F)$$

car $q(0_E)=0_E$ puisque q est linéaire.
Par ailleurs, $q(x)=q(x_F)+q(x_G)$.
Or, d'après la question 3, puisque $p\circ q=q\circ p$, G est stable par q donc $q(x_G)\in G$. Puisque $q(x_G)\in\mathrm{Im}(q)$ par ailleurs, on a alors $q(x_G)\in G\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}$ par hypothèse, donc $q(x_G)=0_E$.
On en déduit que $q(x)=q(x_F)=(p\circ q)(x)$, et ce pour tout $x\in E$, ce qui prouve que $p\circ q=q$.
• Supposons que $p\circ q=q$ et montrons que $G\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}$.
Puisque G et $\mathrm{Im}(q)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $G\cap\mathrm{Im}(q)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\{0_E\}\subset G\cap\mathrm{Im}(q)$.
Montrons l'inclusion réciproque, i.e. montrons que $G\cap\mathrm{Im}(q)\subset\{0_E\}$.
Soit $x\in G\cap\mathrm{Im}(q)$. Par hypothèse, on a $(p\circ q)(x)=q(x)$ donc $p(q(x))=q(x)$.
Puisque $x\in\mathrm{Im}(q)$, alors $q(x)=x$ donc $p(x)=x$. Or, $x\in G=\ker(p)$ donc $p(x)=0_E$, ce qui implique que $x=0_E$ d'où l'inclusion $G\cap\mathrm{Im}(q)\subset\{0_E\}$ et finalement l'égalité $G\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}$.
On a donc bien montré l'équivalence $\boxed{G\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}\Leftrightarrow p\circ q=q.}$

(c) On vient de montrer que $\ker(p)\cap\mathrm{Im}(q)=\{0_E\}\Leftrightarrow p\circ q=q$.
En échangeant les rôles de p et q, on obtient $\ker(q)\cap\mathrm{Im}(p)=\{0_E\}\Leftrightarrow q\circ p=p$ et puisque $p\circ q=q\circ p$, on en déduit que $\ker(q)\cap\mathrm{Im}(p)=\{0_E\}\Leftrightarrow p\circ q=p$ d'où $\boxed{F\cap\ker(q)=\{0_E\}\Leftrightarrow p\circ q=p.}$

(d) • Supposons que $G\cap\ker(q)=\{0_E\}$, i.e. $\ker(p)\cap\ker(q)=\{0_E\}$.
Montrons que $p\circ q=p+q-\mathrm{Id}_E$.
Soit $x\in E$. Posons $x=x_F+x_G$ avec $(x_F,x_G)\in F\times G$.
D'après le même calcul qu'en question 5.b), on a $(p\circ q)(x)=q(x_F)$.
Par ailleurs, on a

$$(p+q-\mathrm{Id}_E)(x)=p(x)+q(x)-x=x_F+q(x_F)+q(x_G)-x_F-x_G=q(x_F)+q(x_G)-x_G.$$

Or, on a $q(q(x_G)-x_G)=(q\circ q)(x_G)-q(x_G)=q(x_G)-q(x_G)=0_E$ donc $q(x_G)-x_G\in\ker(q)$.
Par ailleurs, $p(q(x_G)-x_G)=p(q(x_G))-p(x_G)=q(p(x_G))=0_E$ car $x_G\in\ker(p)$ donc $q(x_G)-x_G\in\ker(p)\cap\ker(q)=\{0_E\}$ par hypothèse.
Ainsi, on a bien $(p+q-\mathrm{Id}_E)(x)=q(x_F)=(p\circ q)(x)$ et ce pour tout $x\in E$, donc $p\circ q=p+q-\mathrm{Id}_E$.
• Supposons que $p\circ q=p+q-\mathrm{Id}_E$. Montrons que $\ker(p)\cap\ker(q)=\{0_E\}$.
On a toujours $\{0_E\}\subset\ker(p)\cap\ker(q)$. Montrons que $\ker(p)\cap\ker(q)\subset\{0_E\}$.

Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. On a alors $p(x) = q(x) = (p \circ q)(x) = 0_E$ donc

$$(p \circ q)(x) = p(x) + q(x) - x \Leftrightarrow x = 0_E,$$

ce qui prouve finalement que $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \{0_E\}$ puis $\ker(p) \cap \ker(q) = \{0_E\}$.
On a donc bien montré que $\boxed{G \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p + q - \mathrm{Id}_E.}$

Partie II : Projecteurs et symétries dans l'espace

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On a

$$p(\lambda u + \mu v) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$
$$= (-4(\lambda x+\mu x')-5(\lambda y+\mu y'), 4(\lambda x+\mu x')+5(\lambda y+\mu y'), -(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'))$$
$$= \lambda(-4x - 5y, 4x + 5y, -x - y + z) + \mu(-4x' - 5y', 4x' + 5y', -x' - y' + z')$$
$$= \lambda p(x, y, z) + \mu p(x', y', z') = \lambda p(u) + \mu p(v),$$

ce qui prouve que $\boxed{p \text{ est linéaire.}}$
On a $p(1, 0, 0,) = (-4, 4, -1), p(0, 1, 0) = (-5, 5, -1)$ et $p(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ donc la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$
Or, puisque A est la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3, A^2$ est la matrice de $p^2 = p \circ p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $p \circ p$ et p ont la même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3, p \circ p = p$ donc $\boxed{p \text{ est un projecteur.}}$
3. (a) On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(p) &= \{(-4x - 5y, 4x + 5y, -x - y + z) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(-4, 4, -1) + y(-5, 5, -1) + z(0, 0, 1) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(-4, 4, -1), (-5, 5, -1), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

La famille $((-4, 4, -1), (-5, 5, -1), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(p)$ mais elle n'est pas libre puisque $(0, 0, 1) = -5(-4, 4, -1) + 4(-5, 5, -1)$.
On extrait de cette famille génératrice la plus grande famille libre possible, par exemple (u, v) où $u = (-4, 4, -1)$ et $v = (0, 0, 1)$. C'est bien une famille libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(p)$ constituée de deux vecteurs, ce qui prouve que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2.}$
Puisque $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$, a fortiori $\mathrm{Im}(p) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\text{l'application } p \text{ n'est pas surjective.}}$

(b) On a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\{(-4,4,-1),(0,0,1)\}$ donc $\mathrm{Im}(p)$ est le plan de base (u,v). Pour trouver une équation cartésienne de ce plan, il faut trouver un vecteur normal $n(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $n \cdot u = 0$ et $n \cdot v = 0$. Le vecteur $n = (1,1,0)$ convient et puisque le plan $\mathrm{Im}(p)$ passe par le point $(0,0,0)$, une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(p)$ est

$$\boxed{x + y = 0.}$$

4. (a) On a

$$(x,y,z) \in \ker(p) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -4x - 5y & = & 0 \\ 4x + 5y & = & 0 \\ -x - y + z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{4}{5}x \\ -x + \frac{4}{5}x + z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{4}{5}x \\ z & = & \frac{1}{5}x \end{array}\right.$$

donc $\ker(p) = \{(x, -\frac{4}{5}x, \frac{1}{5}x) | x \in \mathbb{R}\} = \{\frac{x}{5}(5,-4,1) | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(5,-4,1)\}$ donc $\boxed{\dim(\ker(p)) = 1.}$ On pose $w = (5,-4,1)$ et $\ker(p) = \mathrm{Vect}(w)$.

On a $\ker(p) \neq \{0_E\}$ donc $\boxed{p \text{ n'est pas injective.}}$

(b) Exhibons deux vecteurs non colinéaires orthogonaux à w.
Par exemple, posons $n_1 = (1,0,-5)$ et $n_2 = (0,1,4)$.
Alors $n_1 \cdot w = n_2 \cdot w = 0$ et puisque la droite $\ker(p)$ contient le vecteur $(0,0,0)$, un système d'équations cartésiennes de $\ker(p)$ est

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x - 5z & = & 0 \\ y + 4z & = & 0 \end{array}\right. .}$$

5. (a) Montrons que la famille (u,v,w) est libre.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0)$. On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4\alpha + 5\gamma & = & 0 \\ 4\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \gamma & = & 0 \\ 4\alpha - 4\gamma & = & 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

donc la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est libre. Puisque c'est une famille libre constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est un espace de dimension 3, on en déduit que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(b) Puisque $(u,v) \in (\mathrm{Im}(p))^2$, d'après la question 1.$a$) de la partie I,

$$p(u) = u = 1 \times u + 0 \times v + 0 \times w \quad \text{et} \quad p(v) = v = 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w.$$

Enfin, $w \in \ker(p)$ donc $p(w) = 0_E = 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w$.

Ainsi, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

(c) Soit $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que P est inversible en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3}{\iff}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2}{\overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4} L_1}{\iff}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.}$

(d) On a

$$PDP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -16 & -20 & 0 \\ 16 & 20 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A.}$

6. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$s(x, y, z) = 2p(x, y, z) - (x, y, z) = (-8x - 10y, 8x + 10y, -2x - 2y + 2z) - (x, y, z)$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s(x, y, z) = (-9x - 10y, 8x + 9y, -2x - 2y + z).}$$

On a $s(1, 0, 0) = (-9, 8, -2)$, $s(0, 1, 0) = (-10, 9, -2)$ et $s(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ donc la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\boxed{B = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$

(b) On a $B^2 = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or, puisque B est la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, B^2 est la matrice de $s^2 = s \circ s$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $s \circ s$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ont la même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $\boxed{s \text{ est une symétrie.}}$

7. (a) On a $(u, v) \in (\mathrm{Im}(p))^2$.

Or, d'après la question 2.b) de la première partie, $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E | s(x) = x\}$ donc $s(u) = u = 1 \times u + 0 \times v + 0 \times w$ et $s(v) = v = 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w$.

Toujours d'après la même question, on a $w \in \ker(p) = \{x \in E | s(x) = -x\}$ donc $s(w) = -w = 0 \times u + 0 \times v + (-1) \times w$.

On en déduit que la matrice de l'application linéaire s dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$

(b) On a

$$P\Delta P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -36 & -40 & 0 \\ 32 & 36 & 0 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B.}$