Lycée Fénelon
Année 2023-2024

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°8

Samedi 8 juin 2024 (3h30)

L'énoncé est constitué d'un exercice, d'un problème et comporte 3 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y - 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de ces sous-espaces vectoriels et préciser leur dimension.
2. Donner une base de $F \cap G$ et préciser sa dimension.
3. Compléter cette base de $F \cap G$ en une base de G, puis en une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $H = \mathrm{Vect}\{(-4, 6, -3), (5, -5, 5)\}$. Montrer que $F = H$.

Problème : Projecteurs et symétries

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans la partie II uniquement, $E = \mathbb{R}^3$.
On dit qu'un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $p \circ p = p$.
On dit qu'un endomorphsime $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, i.e. si pour tout $x \in F$, alors $f(x) \in F$.

Partie I : Généralités

Dans toute cette partie, on considère $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
On note $F = \{x \in E | p(x) = x\}$ et $G = \{x \in E | p(x) = 0_E\}$.

1. (a) Montrer que $F = \mathrm{Im}(p)$. Que représente G pour l'application linéaire p ?
   (b) En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Vérifier que $F \cap G = \{0_E\}$.
   (d) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$, puis exprimer $p(x)$ en fonction de x_F et de x_G.
   Indication : on pourra raisonner par analyse-synthèse.

On considère $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

2. (a) Etablir que s est une symétrie.
   (b) Montrer que $F = \{x \in E | s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E | s(x) = -x\}$.
   (c) Soit $x \in E$, tel que $x = x_F + x_G$ où $(x_F, x_G) \in F \times G$. Montrer que $s(x) = x_F - x_G$.
   (d) En déduire que s est un automorphisme.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si F et G sont stables par f.

On considère $q \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur tel que $p \circ q = q \circ p$.

4. (a) Vérifier que $p \circ q$ est un projecteur.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = F \cap \mathrm{Im}(q)$.
5. Montrer les équivalences suivantes :
   (a) $F \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = 0$;
   (b) $G \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = q$;
   (c) $F \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p$;
   (d) $G \cap \ker(q) = \{0_E\} \Leftrightarrow p \circ q = p + q - \mathrm{Id}_E$.

Partie II : Projecteurs et symétries dans l'espace

Dans toute cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-4x-5y, 4x+5y, -x-y+z). \end{array}$$

1. Vérifier que p est une application linéaire et écrire sa matrice, notée A, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer A^2 et en déduire que p est un projecteur.
3. (a) Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$ et exhiber deux vecteurs $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que la famille (u, v) forme une base de $\mathrm{Im}(p)$. L'application p est-elle surjective ?
   (b) Donner une équation cartésienne du plan vectoriel $\mathrm{Im}(p)$.
4. (a) Montrer que $\dim(\ker(p)) = 1$ et exhiber un vecteur $w = (x_3, y_3, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\ker(p) = \mathrm{Vect}(w)$. L'application p est-elle injective ?
   (b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle $\ker(p)$.
5. (a) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que la matrice de l'application linéaire p dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Soit $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
   (d) Vérifier que $PDP^{-1} = A$.

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

6. (a) Expliciter $s(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et écrire sa matrice, notée B, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer B^2 et justifier que s est bien une symétrie.
7. (a) Montrer que la matrice de l'application linéaire s dans la base $\mathcal{B}$ est $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Vérifier que $P\Delta P^{-1} = B$.