

Liste d'exercices n°21

Développements limités

Exercice 1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x + \cos(x)$

2. $x \mapsto \ln(1+x) + \sin(x)$

3. $x \mapsto \cos(x) \sin(x)$

4. $x \mapsto \arctan(x)$

5. $x \mapsto \ln(\cos(x))$

6. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

7. $x \mapsto \frac{\cos^2(x)}{3+x^2}$

8. $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$

9. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$

10. $x \mapsto \left(\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} \right)^2$

11. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$

12. $x \mapsto \ln(1+x) \frac{\sin(x)}{x}$

13. $x \mapsto \exp(\sin(x))$

Exercice 2.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de \exp en 5.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos(\ln(x))$ en 1.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 de \sin en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^4 , qui admettent au voisinage de 0 les développements limités à l'ordre 4 suivants :

$$f(x) =_0 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad g(x) =_0 x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4).$$

1. Calculer $g''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de :
 - (a) fg ;
 - (b) $\frac{1}{f}$;
 - (c) $\frac{g}{f}$;
 - (d) $f \circ g$;
 - (e) $\ln \circ f$;
 - (f) la primitive de f qui s'annule en 0.
3. Peut-on déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g \circ f$?
4. La fonction $\frac{1}{g}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

5. (a) Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{x}{g(x)}$.
- (b) Aurait-on pu obtenir un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction précédente ?
6. (a) Peut-on donner un développement limité de f' à l'ordre 4 en 0 ?
- (b) Donner un développement limité de f' en 0 au plus grand ordre possible.
7. On suppose dans cette question que la fonction f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Donner un développement limité de sa réciproque en $f(0)$ à l'ordre 1.

Exercice 5. Calculer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^4(x)} \left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} \right]$.

Exercice 6. Tracer, au voisinage de 1, la courbe d'équation

$$y = \frac{\ln(1+x) - \ln(2)}{x^2 \ln(x)}.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : x \mapsto 3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} - e^{x^2}.$$

1. Effectuer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que la fonction f admet un minimum local en 0.
3. La fonction f admet-elle un minimum global en 0 ?